

Savoir Ve. 3 : Colinéarité

Entraînement 1

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Les vecteurs $\vec{a} \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Si oui, déterminer une relation de colinéarité liant ces deux vecteurs.

2. On donne : $A(-3; 2; 1)$; $B(2; -13; 4)$ et $C(-6; 14; 2)$. Ces trois points sont-ils alignés ?

3. On donne les coordonnées de quatre points mobiles en fonction du temps t (en secondes) :

$A(t; t-1; 0)$; $B(2; 3t; t)$; $C(6; 3; 2t)$ et $D(3t; -6t; -t)$.

Montrer que les droites (AB) et (CD) restent à tout instant parallèles.

Entraînement 2

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Les vecteurs $\vec{a} \begin{pmatrix} 21 \\ 7 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{b} \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Si oui, déterminer une relation de colinéarité liant ces deux vecteurs.

2. On donne : $A(3; 1; -3)$; $B(4; 0; 1)$; $C(5; -2; 0)$ et $D(-4; -1; 10)$.

(AC) et (BD) sont-elles parallèles ?

3. On donne les coordonnées de trois points mobiles en fonction du temps t (en secondes) :

$A(1+t; 1-t; 2)$; $B(t+4; 3-t; 1)$ et $C(4t+1; 1+t; 2-t)$.

Montrer que ces trois points restent à tout instant alignés.

Entraînement 3

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit α un nombre réel.

Les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha+1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha^2 - \alpha \\ \alpha^2 - 1 \\ 1 - \alpha \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Si oui, déterminer une relation de colinéarité liant ces deux vecteurs.

2. On donne : $A(-1; 4; 5)$; $B(-4; 7; 11)$; $C(2; 3; 0)$ et $D(7; -2; -10)$.

(AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

3. On donne les coordonnées de trois points mobiles en fonction du temps t (en secondes) :

$A(-2; 2t; t)$; $B(0; 1+t; 0)$ et $C(-2t; 1+t^2; t^2)$.

Montrer que ces trois points restent à tout instant alignés.

Entraînement n°4

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Les vecteurs $\vec{a} \left(\frac{1}{3} ; -2 ; -\frac{2}{3} \right)$ et $\vec{b} \left(\frac{1}{2} ; -3 ; -1 \right)$ sont-ils colinéaires ?

Si oui, déterminer une relation de colinéarité liant ces deux vecteurs.

2. On donne les coordonnées de deux points fixes $A(1; 0; 2)$ et $B(-1; 3; 1)$ et d'un point mobile en fonction du temps t (en secondes) : $C(3 + 2t; -3 - 3t; 3 + t)$.

Montrer que ces trois points restent à tout instant alignés.

3. On donne : $A(1; -2; -1)$; $B(-1; 3; 2)$; $E(-7; -3; 1)$ et $F(4; 1; 0)$.

(AF) et (BE) sont-elles parallèles ?

Corrections Savoir Ve. 3

Corrigé Entraînement n°1

1. On a $\frac{x_{\vec{b}}}{x_{\vec{a}}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; $\frac{y_{\vec{b}}}{y_{\vec{a}}} = \frac{-2}{-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ et $\frac{z_{\vec{b}}}{z_{\vec{a}}} = \frac{1}{1/\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Attention : **il est interdit d'utiliser une valeur approchée** (1,414) pour démontrer une égalité.

On a donc : $\vec{b} = \sqrt{2}\vec{a}$ donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

2. On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} \neq \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés.

3. On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-t \\ 2t+1 \\ t \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 3t-6 \\ -6t-3 \\ -3t \end{pmatrix}$. On constate donc que $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$ donc (AB) et (CD) sont effectivement parallèles.

Corrigé Entraînement n°2

1. On a $\frac{x_{\vec{b}}}{x_{\vec{a}}} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$; $\frac{y_{\vec{b}}}{y_{\vec{a}}} = \frac{3}{7}$ et $\frac{z_{\vec{b}}}{z_{\vec{a}}} = \frac{-1/7}{-1/3} = \frac{3}{7}$.

Attention : **il est interdit d'utiliser une valeur approchée** pour démontrer une égalité.

On a donc : $\vec{b} = \frac{3}{7}\vec{a}$ (ou $\vec{a} = \frac{7}{3}\vec{b}$) donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

2. On a : $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$. On a $\frac{y_{\overrightarrow{BD}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} \neq \frac{x_{\overrightarrow{BD}}}{x_{\overrightarrow{AC}}}$ donc $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc (AC) et (BD) ne sont pas parallèles.

3. On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix}$. On constate donc que $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$ donc les points A, B et C sont alignés.

Corrigé Entraînement n°3

1. On a : $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha} = \alpha - 1$; $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha + 1} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{\alpha + 1} = \alpha - 1$ et $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} = \frac{1 - \alpha}{-1} = -1 + \alpha = \alpha - 1$.

On a donc : $\vec{v} = (\alpha - 1)\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AB} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = -5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc (AB) et (CD) sont parallèles.

3. On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-t \\ -t \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2t+2 \\ 1-2t+t^2 \\ t^2-t \end{pmatrix}$.

On a : $\frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = -t + 1$; $\frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{1-2t+t^2}{1-t} = \frac{(1-t)^2}{1-t} = 1-t$ et $\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = -t + 1$

On constate donc que $\overrightarrow{AC} = (1-t)\overrightarrow{AB}$ donc les points A, B et C sont alignés.

Corrigé Entraînement n°4

1. On a $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a}$ donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

2. On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2+2t \\ -3-3t \\ 1+t \end{pmatrix}$.

On a $\frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{2+2t}{-2} = -1-t$; $\frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{-3-3t}{3} = -1-t$ et $\frac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{1+t}{-1} = -1-t$

On observe donc que $\overrightarrow{AC} = -(1+t)\overrightarrow{AB}$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc à tout instant colinéaires, et donc les points A , B et C restent à tout instant alignés.

3. On a : $\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a : $\frac{x_{\overrightarrow{BE}}}{x_{\overrightarrow{AF}}} \neq \frac{z_{\overrightarrow{BE}}}{z_{\overrightarrow{AF}}}$ donc $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires, donc (AF) et (BE) ne sont pas parallèles.