

Corrigé Exercice 9

1) a) $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{2}{-1} = -2$; $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = \frac{-8}{4} = -2$ et $\frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}} = \frac{3}{-1,5} = -2$ donc $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{v}}} = \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{v}}} = \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$

(ou alors on écrit directement : « on remarque que : $\vec{u} = -2\vec{v}$ ») donc les vecteurs sont colinéaires

On a ainsi : $\vec{u} = -2\vec{v}$ (ou $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u}$) [à ajouter si jamais on ne l'a pas déjà écrit...]

b) $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{w}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{w}}} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3} \neq \frac{1}{2}$ donc $\frac{x_{\vec{u}}}{x_{\vec{w}}} \neq \frac{y_{\vec{u}}}{y_{\vec{w}}}$ et les vecteurs ne sont pas colinéaires

$\frac{x_{\vec{w}}}{x_{\vec{a}}} = 4 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$; $\frac{y_{\vec{w}}}{y_{\vec{a}}} = -\frac{6}{-4} = \frac{3}{2}$ et $\frac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{a}}} = \frac{1,5}{1} = \frac{3}{2}$ donc $\frac{x_{\vec{w}}}{x_{\vec{a}}} = \frac{y_{\vec{w}}}{y_{\vec{a}}} = \frac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{a}}}$ donc les vecteurs sont colinéaires

On a $\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{a}$ (ou $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{w}$)

2) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 - \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} - \frac{3}{2} \\ \frac{-13}{2} + \frac{1}{2} \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ Or $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2}$; $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{-4}{-2} = 2 \neq -\frac{1}{2}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc les points A, B, C ne sont pas alignés.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - 0 \\ 1 - \frac{5}{2} \\ 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$ On remarque que $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{BD}$ donc les vecteurs sont

colinéaires et les points A, B et D sont alignés : le point A appartient à la droite (BD)

3) Dans le repère donné, on a : $M(1; 0; -2)$ D'autre part, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$
Donc $N(2; 1; -2)$ et enfin $P(2; 3; 0)$. D'autre part $C(0; 1; 0)$.

Ainsi : $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CP} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{MN}$: les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires donc les droites (MN) et (CP) sont parallèles.

Corrigé Exercice 10

1) a) 1^{re} méthode : On a d'une part : $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Et d'autre part : $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

On a $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MC}$ donc les vecteurs sont **colinéaires**. (Évidemment, on peut les décomposer en fonctions d'autres vecteurs... mais on doit trouver la même relation de colinéarité)

2^e méthode : On utilise par exemple le repère $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$. Dans ce repère, on a :

$$M\left(\frac{1}{3}; 0; 0\right) \quad C(0; 1; 0) \quad A(1; 0; 0) \quad \overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow N \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\overrightarrow{AN} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MC} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on retrouve effectivement que $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{MC}$ avec la même conclusion.

b) Les droites (AN) et (MC) sont **parallèles**

2) On a d'une part : $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Et d'autre part : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ On a donc $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{CE}$

Les vecteurs sont colinéaires donc les points **C, D et E sont alignés**

3) D'une part : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MP} - \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$

Et d'autre part : $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MI} = -\overrightarrow{MP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$. On a alors $\overrightarrow{IJ} = -3\overrightarrow{PI}$ Les vecteurs sont colinéaires, donc les points I, J et P sont alignés : **le point P appartient à la droite (IJ).**

4) $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$

Donc $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$ et on a $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK}$ Donc $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DK}$

Les vecteurs sont colinéaires, donc **les droites (JI) et (DK) sont parallèles.**

Corrigé Exercice 11

a) On a : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et **les points B, C et E sont alignés**

b) Quand $a = 1$ le point F est confondu avec le point C ; quand $a = 2$ le point F est le milieu de [BC] et $a = \frac{1}{2}$ Le point F est tel que C soit le milieu de [BF]

On a : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BA} + \frac{a-1}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{a}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{a}\overrightarrow{AC} = \vec{0} + \frac{1}{a}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{a}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{a}\overrightarrow{BC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et les points B, C et F sont alignés : **F appartient à la droite (BC)**