

CORRECTION Métropole 1 – juin 26

Corrigé Exercice 1

Partie A

1.

a. Donner $P(C)=0,75$.

b. $\Rightarrow$

2. $p(V \cap C) = p(V) \times p_V(C) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$

Il y a 24 % de chance qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.

3. $p_C(V) = \frac{p(V \cap C)}{p(C)} = \frac{0,24}{0,75} = 0,32$

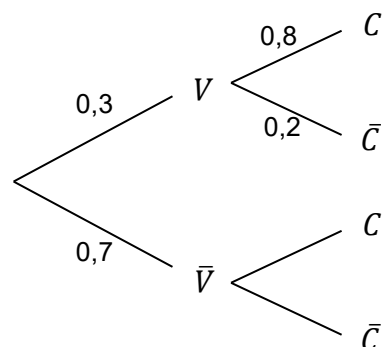
Si la famille a réservé une cabine, il y a 32% de chance qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.

4. $P_{\bar{V}}(C) = \frac{p(\bar{V} \cap C)}{p(\bar{V})}$

On a $p(C) = p(V \cap C) + p(\bar{V} \cap C) \Leftrightarrow 0,75 = 0,24 + x \Leftrightarrow x = 0,75 - 0,24 = 0,51$

Alors $P_{\bar{V}}(C) = \frac{0,51}{0,7} \simeq 0,73$

Si la famille n'a pas réservé d'emplacement pour un véhicule, il y a alors environ 73% de chances qu'elle ait réservé une cabine



Partie B

1. $E(X) = \sum x_i \times p(X = x_i) = 0 \times 0,19 + 70 \times 0,06 + 100 \times 0,51 + 170 \times 0,24 = 96$

1^{ère} version : $V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 \times p(X = x_i)$

$$\begin{aligned} V(X) &= (0 - 96)^2 \times 0,19 + (70 - 96)^2 \times 0,06 + (100 - 96)^2 \times 0,51 + (170 - 96)^2 \times 0,24 \\ &= 9216 \times 0,19 + 676 \times 0,06 + 16 \times 0,51 + 5476 \times 0,24 = 3114. \end{aligned}$$

2^{ème} version : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum x_i^2 \times p(X = x_i) - (E(X))^2$

$$\begin{aligned} V(X) &= 0^2 \times 0,19 + 70^2 \times 0,06 + 100^2 \times 0,51 + 170^2 \times 0,24 - 96^2 \\ &= 12330 - 9216 = 3114. \end{aligned}$$

2.

a. Avoir une remise de 40% revient à multiplier par $\left(1 - \frac{40}{100}\right) = 0,6$

On a alors $Z = 0,6X + 0,6Y = 0,6(X + Y)$

b. $E(Z) = E(0,6(X + Y)) = 0,6E(X + Y) = 0,6(E(X) + E(Y)) = 0,6 \times (96 + 104) = 120$

$V(Z) = V(0,6(X + Y)) = 0,6^2 \times V(X + Y)$ et, les variables X et Y étant indépendantes

$$V(Z) = 0,36(V(X) + V(Y)) = 0,36 \times (3\,114 + 1\,686) = 1\,728$$

3.

$$\begin{aligned} \text{a. } E(M_n) &= E\left(\frac{1}{n} \times (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)\right) = \frac{1}{n} \times E(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) \\ &= \frac{1}{n} \times (E(Z_1) + E(Z_2) + \dots + E(Z_n)) = \frac{1}{n} \times (n \times E(Z)) = \frac{n}{n} \times 120 = 120 \end{aligned}$$

$$\text{De la même façon } V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times V(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n)$$

$$\text{Toutes les variables } Z_i \text{ étant indépendantes, on a } V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times (nV(Z)) = \frac{n}{n^2} \times 1728 = \frac{1728}{n}$$

b. Pour $E(M_n) = 120$ et $V(M_n) = \frac{1728}{n}$, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$p(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2} \text{ pour } \delta = 6 \quad \text{On a alors } p(|M_n - 120| \geq 6) \leq \frac{1728}{36n}$$

En cherchant l'évènement contraire, on a :

$$p(|M_n - 120| < 6) = p(114 < M_n < 126) = 1 - p(|M_n - 120| \geq 6)$$

$$\text{Et par conséquent : } p(114 < M_n < 126) \geq 1 - \frac{1728}{36n}$$

$$\text{On cherche donc la plus petite valeur de } n \text{ tel que } 1 - \frac{1728}{36n} \geq 0,85$$

$$\Leftrightarrow \frac{1728}{36n} \leq 0,15 \Leftrightarrow 1728 \leq 5,4n \Leftrightarrow n \geq \frac{1728}{5,4} \Leftrightarrow n \geq 320$$

Il faudrait un échantillon d'au moins 320 familles pour avoir plus de 85 % de chances que le prix total moyen pour les suppléments et les extras, payé par ces familles soit strictement compris entre 114 € et 126 €

Corrigé Exercice 2

1.

a. Affirmation 1 : VRAIE

$$\text{La droite } (AB) \text{ a pour vecteur directeur } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-3 \\ 1-0 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Le plan } (P) \text{ a pour vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \text{ donc } (AB) \text{ est bien orthogonale à } (P)$$

$$\text{Le milieu } M \text{ du segment } [AB] \text{ a pour coordonnées } M\left(\frac{3+2}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{2-3}{2}\right) \text{ soit } M\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

On teste l'appartenance de M au plan (P) :

$$-x_M + y_M - 5z_M - 0,5 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 0,5 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{Donc } M \in (P)$$

b. Affirmation 2 : FAUSSE

$$\text{La droite } (AB) \text{ a pour représentation paramétrique } \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = t' \\ z = 2 - 5t' \end{cases}, \quad t' \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer l'intersection de (d) et (AB) on cherche à résoudre le système :

$$\begin{cases} t = 3 - t' \\ -1,5 - t = t' \\ 2 - 2t = 2 - 5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - t' \\ -1,5 - (3 - t') = t' \\ 2 - 2(3 - t') = 2 - 5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - t' \\ -4,5 + t' = t' \\ 2 - 6 + 2t' = 2 - 5t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - t' \\ -4,5 = 0 \\ 7t' = 6' \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution, donc les droites ne sont pas sécantes

c. Affirmation 3 : VRAIE

$$\text{On a } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$$

$$\text{Avec } \overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ donc } CA = \sqrt{1,5^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{20,25} = 4,5$$

$$\text{et } \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } CB = \sqrt{0,5^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20,25} = 4,5$$

$$\text{On a } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 1,5 \times 0,5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 6,75 \quad \text{et donc } \cos(\widehat{ACB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \times CB} = \frac{6,75}{4,5^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{On trouve alors } \widehat{ACB} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \simeq 70,5$$

2. Affirmation 4 : VRAIE

Pour Clothilde et la porte A : tirage sans remise avec ordre

Il y a $N_A = 8 \times 7 \times 6 = 336$ combinaisons possibles. Clothilde peut trouver le bon code avec la probabilité de $\frac{1}{336}$

Pour Titouan et la porte B : tirage sans remise sans ordre

Il y a $N_A = \binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$ combinaisons possibles. Titouan a 1 chance sur 70 de trouver le bon code

On a $\frac{1}{70} > \frac{1}{336}$ donc Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clothilde.

Corrigé Exercice 3

Partie A

Pour une température de la pièce variant de 18°C à 20°C, le système de chauffage fonctionne en continu. La température de la pièce augmente progressivement.

Dans cette partie, on modélise la température de la pièce, en degré Celsius, à l'instant t , exprimé en dizaines de minutes, par une fonction T définie sur $[0 ; +\infty[$.

On admet que la fonction T est :

□ dérivable sur $[0 ; +\infty[$;

□ solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,035y + 0,91$ où y est une fonction de la variable t , définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

On note T' la fonction dérivée de la fonction T .

On suppose qu'au début de l'étude, la température de la pièce est de 18°C . Ainsi.

1. La solution particulière constante de (E) est $c = -\frac{0,91}{-0,035} = 26$

Donc les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0 ; +\infty[$ sont de la forme :

$$y(t) = ke^{(-0,035)t} + 26 \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

2. On a la forme générale $T(t) = ke^{(-0,035)t} + 26$

$$\text{avec } T(0) = 18 \Leftrightarrow ke^{(-0,035) \times 0} + 26 = 18 \Leftrightarrow k + 26 = 18 \Leftrightarrow k = -8$$

$$\text{On a bien } T(t) = -8e^{(-0,035)t} + 26$$

3. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra la température de 20°C . On exprimera le résultat en heures et minutes arrondi à la minute.

On cherche la plus petite valeur de t telle que $T(t) \geq 20$

$$\Leftrightarrow -8e^{-0,035t} + 26 \geq 20 \Leftrightarrow 8e^{-0,035t} \leq 6 \Leftrightarrow -0,035t \leq \ln\left(\frac{6}{8}\right) \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln(0,75)}{-0,035}$$

$$\text{Avec } \frac{\ln(0,75)}{-0,035} \simeq 8,2195 \quad \text{et pour la conversion : } 0,2195 \times 60 \simeq 13,17$$

Les 20°C seront atteints au bout de 8 h et 13 minutes

4. On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,035t} = 0$ donc par somme et multiple de limites : $\lim_{t \rightarrow +\infty} T(t) = 26$

Même en laissant un temps infini le chauffage en place, la température n'atteindra jamais les 28°C .

Partie B

1. Avec $n = 0$, la formule de récurrence donne :

$$u_1 = 0,965u_0 + 0,35 + 0,07e^{-0,1 \times 0} = 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07 \times 1 = 19,72.$$

CQFD

2. Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 20 > 10$: l'inégalité est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Si elle vraie pour $n = p$ alors on a $u_p > 10$

Alors pour $n = p + 1$, on a :

$$u_n = u_{p+1} = 0,965u_p + 0,35 + 0,07e^{-0,1p}$$

$$\text{On a alors } u_p > 10 \Rightarrow 0,965u_p > 9,65$$

$$\Rightarrow 0,965u_p + 0,35 + 0,07e^{-0,1p} > 10 + 0,07e^{-0,1p} > 10 \quad (\text{car l'exp est positive})$$

$$\Rightarrow u_{p+1} > 10$$

alors la propriété est vraie pour $n = p + 1$.
 Conclusion : Pour tout n , on a bien $u_n > 10$.

3. (u_n) est décroissante et minorée par 10, donc d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est convergente.

4.

a. On a $u_{n+1} \rightarrow \ell$; $u_n \rightarrow \ell$ et $e^{-0,1n} \rightarrow 0$ donc par passage à la limite, on a $\ell = 0,965\ell + 0,35 + 0$.
 Donc ℓ est bien solution de l'équation $x = 0,965x + 0,35$.

b. $\ell = 0,965\ell + 0,35 \Leftrightarrow 0,35\ell = 0,35 \Leftrightarrow \ell = 1$ Au bout d'un temps très long, selon ce modèle, la température de la pièce finirait par se stabiliser autour de 1°C

5.

a.

4.	while u < 18 :
5.	u = 0.965*u+0,35+0.07*exp(-0.1*n)
6.	n = n+1

b. La suite est décroissante. Pour $n = 7$ on a $u_7 \simeq 18,12$ et pour $n = 8$ on a $u_8 \simeq 17,87$

C'est donc au bout de 8 dizaines de minutes que la pièce repasse sous les 18°C et que le système se remettra en marche

Corrigé Exercice 4

Partie A

1. On a graphiquement $f(0) = 1$, or $f(0) = a + \frac{b \ln 1}{1} = a + 0 = a$ donc $a = 1$.

2.

a. $f'(0)$ est la pente de la tangente T_A donc $f'(0) = \frac{4}{1} = 4$.

b. f semble concave autour de $x = 1$ donc $f''(1)$ est négatif.

3.

a. On a : $f(x) = 1 + \frac{b}{x+1} \times \ln(x+1)$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 - \frac{b}{(x+1)^2} \ln(x+1) + \frac{b}{x+1} \times \frac{1}{x+1} = \frac{-b \ln(x+1) + b}{(x+1)^2} = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

b. $f'(0) = 4 \Rightarrow \frac{b(1 - \ln(0+1))}{(0+1)^2} = 4 \Rightarrow \frac{b \times 1}{1} = 4 \Rightarrow b = 4$

Partie B

1. Soit $X = x + 1$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $X \rightarrow +\infty$.

Or, par croissance comparée, on a : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$

Ainsi, par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

La droite d'équation $y = 1$ est donc asymptote à C_f en $+\infty$.

2. $1 - \ln(x + 1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x + 1) < 1 \Leftrightarrow x + 1 < e^1 (= e) \Leftrightarrow x < e - 1$

Donc l'ensemble des solutions est $S =]-1; e - 1[$.

3. On calcule : $f(e - 1) = 1 + \frac{4 \ln(e)}{e} = 1 + \frac{4}{e}$.

On a d'après la question A.3.a : $f'(x) = \frac{4(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$.

On obtient donc :

x	-1	$e - 1$	$+\infty$		
$4(1 - \ln(x + 1))$	$\parallel$	$+$	0	$-$	
$(x + 1)^2$	0	$+$	$ $	$+$	
$f'(x)$	$\parallel$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1 + \frac{4}{e}$	$\searrow$	1

4. f est continue et strictement décroissante sur $[2; +\infty[$ avec $f(2) > 1,5 > \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution α dans $[2; +\infty[$.

On observe que $f(25,09) > 1,5 > f(25,1)$ donc $\alpha \simeq 25,1$.

5.

- a. Soit $u = \ln(x + 1)$, on a alors $\frac{\ln(x+1)}{x+1} = u' \times u$.

Or la primitive de $u'u$ est $\frac{1}{2}u^2$.

On obtient donc :

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x+1))^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} (\ln(3))^2 - \frac{1}{2} (\ln(1))^2 = \frac{1}{2} (\ln 3)^2 \quad \text{CQFD}$$

2^e méthode : intégration par parties

avec $u = \ln(x + 1)$ et $v' = \frac{1}{x+1} \Rightarrow u' = \frac{1}{x+1}$ et $v = \ln(x + 1)$.

$$\text{soit } I = \int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$$

$$I = [uv] - \int u'v = [(\ln(x+1))^2]_0^2 - \int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = (\ln 3)^2 - 0 - I$$

$$\Rightarrow I = (\ln 3)^2 - I \quad \Rightarrow 2I = (\ln 3)^2 \quad \Rightarrow I = \frac{1}{2} (\ln 3)^2$$

- b. Cette aire est justement égale à l'intégrale que l'on vient de calculer...

Elle vaut donc $\frac{1}{2} (\ln 3)^2$.