

Techniques Algébriques

Savoirs

1^{ère} partie

- Ta. 1** Techniques de développement
- Ta. 2** Mise au même dénominateur
- Ta. 3** Montrer que deux expressions sont égales
- Ta. 4** Tableaux de signes : fonctions de références, produits et quotients



- Techniques de factorisation **Ta. 5**
- Factorisation des identités remarquables **Ta. 6**
- Simplifier une fraction **Ta. 7**
- Inéquations et tableaux de signes **Ta. 8**

2^{ème} partie

EXERCICES en classe

Savoir Ta. 5 : Techniques de factorisation

Exercice 1 : Factorisation « naturelle »

1) Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$$A = 8x^2 - 4x$$

$$B = 5 + 15x$$

$$C = 9 - 3x^2$$

$$D = -12x^2 + 7x$$

$$E = 5x - 5x^2$$

$$F = 5 - 6x$$

$$H = -7ab + 2a^2$$

$$J = -10x^3 - 25x$$

Besoin de plus d'entraînement ?

$$K = 6x - 4x^2$$

$$L = 4a + 4a^2$$

$$M = -12n^2 - 7n$$

$$N = 9x^2 - 4$$

$$P = 6x + 3x^2$$

$$Q = 3a^2b - ab^2$$

$$V = 4x^2 + 12x - 2$$

$$W = 3x^3 + 2x^2 + 5x$$

$$Y = 9x - 3x^2 + 15x^3$$

$$Z = 3a^2b + a^2b^2 - 5ab^2$$

2) Factoriser au maximum les expressions suivantes :

$$R = 2x^2 - 22x - 2$$

$$S = 4x - 4 + 4x^2$$

$$T = 4x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$U = 15x^4 - 10x^3 + 5x^2$$

Exercice 2 : D'autres factorisations « naturelles »

1) Factoriser x dans les expressions suivantes, puis calculer :

$$A = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x$$

$$B = 5x + \frac{2}{7}x$$

$$C = \frac{2a}{3} - 4a$$

$$D = \frac{x}{5} + \frac{3x}{2}$$

$$E = n - \frac{4n}{3}$$

2) Factoriser pour réduire les expressions suivantes

$$F = \sqrt{7} - 3\sqrt{7}$$

$$G = \frac{3\pi}{4} - \pi$$

$$H = 12\sqrt{x} - 6x\sqrt{x}$$

$$I = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$J = 3\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

Exercice 3 : Factorisation « forcée »

On donne les expressions $A = 4x^2 - 5x + 1$; $B = -2x^2 + x - 4$ et $C = x^3 + 3x^2 - 8x + 4$

1) Factoriser A et B par 2

3) Factoriser A et C par x

2) Factoriser A et B par -1

4) Factoriser B et C par x^2

Exercice 4 : Facteur complexe (sans « piège »)

1) Factoriser :

$$A = 2x + x(3x + 1)$$

$$B = x^3(x - 2) + x^3(5x + 1)$$

$$C = (3x + 7)(2 - 5x) + (3x + 7)(x + 6)$$

$$D = (x + 3)^2 + (5 - 2x)(x + 3)$$

Besoin de plus d'entraînement ?

$$J = x^3 + x^3(x - 2)$$

$$K = (2x - 1)(4 + x) + x(4 + x)$$

$$L = (2x + 5) + (2x + 5)^2$$

$$M = (3x - 4)(2x - 1) + (-1 + 2x)(2 + 5x)$$

Exercice 4bis : Facteur complexe (signes et facteurs)

2) Factoriser :

$$E = (6x + 2)(5 - 2x) - (6x + 2)(7x - 3)$$

$$F = (x + 3)(2x - 5) + 2(3x + 6)(x + 3)$$

$$G = (n + 1)(n - 1) - 2(n - 1)(2n + 6)$$

$$H = (2x + 3) - (2x + 3)(5x + 7)$$

$$I = (4 - 6x)(4 + 6x) - (4 - 6x)^2$$

Besoin de plus d'entraînement ?

$$N = (5t + 3)^2 + 3(5t + 3)(7t - 2)$$

$$O = (1 + 3x)^2 + (1 + 3x)$$

$$P = (4 - 3x)(1 + 2x) - (1 + 2x)^2$$

$$Q = (6 - 2x)(5x + 4) + 3(3 + 2x)(6 - 2x)$$

Exercice 5 : Un peu de technique1) On donne l'expression $C = (2x - 1)(6 + x) + (4x - 3)(2x - 1) - 2(5x + 3)^2$ a) Factoriser $(2x - 1)(6 + x) + (4x - 3)(2x - 1)$ b) En déduire une factorisation de l'expression C .2) On donne les expressions $A = (3 - 2x)(5x - 1)$ et $B = (5x - 1)^2$ a) Développer $A + 2B$ b) Factoriser $B - A$ **Savoir Ta. 6 : Factorisation des identités remarquables****Exercice 6 : Les $a^2 - b^2$**

Factorise, quand c'est possible, les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable :

$$A_1 = 9x^2 - 4$$

$$A_2 = 16x^2 - 1$$

$$A_3 = 64x^2 + 49$$

$$A_4 = 25 - 36x^2$$

$$A_5 = x^2 - 1$$

$$A_6 = -49x^2 + 16$$

Besoin de plus d'entraînement ?

Factorise, quand c'est possible à l'aide d'une identité remarquable :

$$A_7 = -81 + 9a^2$$

$$A_8 = -x^2 - 1$$

$$A_9 = x^4 - x^2$$

$$A_{10} = 3x^2 - 1$$

$$A_{11} = 2 - 8x^2$$

$$A_{12} = 2 - x^2$$

Exercice 7 : Les $a^2 \pm 2ab + b^2$

Factorise, quand c'est possible, les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable :

$$B_1 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$B_2 = 9x^2 - 6x + 1$$

$$B_3 = 49x^2 - 14x - 1$$

$$B_4 = 25x^2 - 10x + 4$$

$$B_5 = 64 + 32x + 4x^2$$

$$B_6 = 9x^2 - 18x + 4$$

Besoin de plus d'entraînement ?

Factorise, quand c'est possible à l'aide d'une identité remarquable :

$$B_7 = 16x^2 - 20x + 25$$

$$B_8 = x^2 - 18x + 81$$

$$B_9 = 8x + x^2 + 16$$

$$B_{10} = x^4 - 2x^2 + 1$$

Exercice 8 : Avec des fractions (miam)

Factoriser, quand c'est possible, à l'aide d'une identité remarquable :

$$A = \frac{x^2}{9} - \frac{16}{25}$$

$$B = \frac{x^2}{4} + 3x + 9$$

$$C = 1 - \frac{4x^2}{9}$$

$$D = \frac{25}{x^2} - 9$$

$$E = 4x^2 - \frac{9}{16}$$

$$F = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$$

Exercice 9 : Les $(..)^2 - (...)^2$

Factorise, quand c'est possible, les expressions suivantes à l'aide d'une identité remarquable :

$$C_1 = 9x^2 - (x + 2)^2$$

$$C_2 = (7 - x)^2 - 1$$

$$C_3 = 64 - (2x - 1)^2$$

$$C_4 = (2x - 3)^2 - (3 - 4x)^2$$

$$C_5 = (x + 1)^2 - (2 + 3x)^2$$

$$C_6 = (2x - 3)^2 - (4 + x)^2$$

Besoin de plus d'entraînement ?

Factorise, quand c'est possible :

$$C_7 = 4 - (6x - 1)^2$$

$$C_8 = (2x + 3)^2 - 16x^2$$

$$C_9 = (4x - 1)^2 - (x - 3)^2$$

$$C_{10} = (x - 5)^2 - (x + 4)^2$$

Exercice 10 : Factorisation par étape

1) On donne $B = 9x^2 - 25 - (5x - 2)(3x + 5)$

a) Factoriser $9x^2 - 25$

b) En déduire une factorisation de l'expression B

2) On donne $D = 1 - 4x^2 + (x - 2)(2x - 1)$

a) Factoriser $1 - 4x^2$

b) En déduire une factorisation de l'expression D

Exercice 11 : En vrac

$$A = 3x^2 - 12x^3$$

$$B = 4y^2 + 36$$

$$C = x + 3 - 2(x + 3)(5 - x)$$

$$D = x^2 + 2x + 1 - 3(x - 1)(x + 1)$$

$$E = (x + 2)^2 - (2x - 3)(2x - 3)$$

$$F = 10a^2 - 5a$$

$$G = -4x^2 + 9$$

$$H = (3x + 2) - 2(3x + 2)(1 - x)$$

$$I = 4x^2 - 1 - (x + 7)(1 - 2x)$$

$$J = (n + 1)^2 - 9(n - 2)^2$$

$$K = 4y^2 - 2y$$

$$L = 1 - 4(x + 3)^2$$

Savoir Ta. 7 : Simplification de fractions**Exercice 12 : Simplification de termes**

1) Simplifier au maximum les fractions suivantes

$$A_1 = \frac{x^2}{x}$$

$$A_2 = \frac{x^3}{x}$$

$$A_3 = \frac{x}{x^4}$$

$$A_4 = \frac{n^3}{n^7}$$

$$A_9 = \frac{x^2}{x^3}$$

$$A_{10} = \frac{x^5}{x^2}$$

$$A_{11} = \frac{6x^{12}}{2x^4}$$

$$A_5 = \frac{6x^2}{2x}$$

$$A_6 = \frac{3a}{15a^3}$$

$$A_7 = \frac{a^2b}{ab^4}$$

$$A_8 = \frac{6xy}{4xy^2}$$

$$A_{12} = \frac{14}{7n^2}$$

$$A_{13} = \frac{10a^2}{2ab^2}$$

$$A_{14} = \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

2) « Casser » la somme puis simplifier chaque terme

$$B_1 = \frac{4x - 6}{-2}$$

$$B_2 = \frac{2x - 5}{x}$$

$$B_3 = \frac{5x^2 - 4x}{x^2}$$

$$B_7 = \frac{5 - 2x}{-x}$$

$$B_8 = \frac{4x^2 - 2}{4x}$$

$$B_4 = \frac{4x^2 + 6x - 1}{2x}$$

$$B_5 = \frac{n^2 - 4}{n^3}$$

$$B_6 = \frac{3a^2b - 2b^2}{6ab}$$

$$B_9 = \frac{n^4 - 3n}{n^2}$$

$$B_{10} = \frac{x^2y + 2xy - 4xy^2}{2x^2y^2}$$

Besoin de plus d'entraînement ?

1) Simplifier

$$A_9 = \frac{x^2}{x^3}$$

$$A_{10} = \frac{x^5}{x^2}$$

$$A_{11} = \frac{6x^{12}}{2x^4}$$

$$A_{12} = \frac{14}{7n^2}$$

$$A_{13} = \frac{10a^2}{2ab^2}$$

$$A_{14} = \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

2) « Casser » puis simplifier

$$B_7 = \frac{5 - 2x}{-x}$$

$$B_8 = \frac{4x^2 - 2}{4x}$$

$$B_9 = \frac{n^4 - 3n}{n^2}$$

$$B_{10} = \frac{x^2y + 2xy - 4xy^2}{2x^2y^2}$$

Exercice 13 : A-t-on le droit de simplifier ?

Simplifier quand c'est possible (et dire quand ça ne l'est pas)

$$C_1 = \frac{2x(x+3)}{2x} \quad C_2 = \frac{5+x}{5} \quad C_3 = \frac{3x+1}{5(3x+1)}$$

$$C_4 = \frac{4x-5}{(4x-5)^2} \quad C_5 = \frac{(2x-1)-3x}{2x-1}$$

$$C_6 = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)^2} \quad C_7 = \frac{4x^2(3x-4)}{2x(4-3x)}$$

Besoin de plus d'entraînement ?

$$C_8 = \frac{4(x+1)}{x+1} \quad C_9 = \frac{2x-3}{-3}$$

$$C_{10} = \frac{4}{3x+4} \quad C_{11} = \frac{3x+2}{(3x+2)(3x-2)}$$

$$C_{12} = \frac{4x+2(2x+3)}{2x+3}$$

$$C_{13} = \frac{3x(x+2) - (5-x)(x+2)}{4(x+2)}$$

Exercice 14 : Factoriser pour pouvoir simplifier

Il faut chercher à factoriser le numérateur ou le dénominateur (voir les 2) pour faire apparaître un facteur commun et pouvoir simplifier

$$A = \frac{2x-5}{5-2x} \quad B = \frac{5x}{5x^2-15x} \quad C = \frac{x^2-3x}{1-3x} \quad D = \frac{6x-3}{2x-1}$$

$$E = \frac{2x+8}{3x^2+12x} \quad F = \frac{x^3-2x^2}{x(x-2)} \quad G = \frac{1-x^2}{1+x} \quad H = \frac{2x^2+3x}{4x^2-9}$$

Savoir Ta. 8: Résolution d'inéquations**Exercice 15 : Résoudre une inéquation (1^{er} degré)**

1) Résoudre et donner l'intervalle qui correspond à la solution :

a) $3x+4 \leq 16$ b) $\frac{1}{2}x-3 > 0$ c) $1-4x \leq -3$

2) On donne : $f(x) = 5x-7$ et $g(x) = -2x-12$

a) Résoudre $f(x) < 3$

b) Déterminer les nombres x tels que $g(x) \leq -4$

c) Déterminer l'intervalle sur lequel f est positive ?

d) Résoudre $f(x) \geq g(x)$

e) Résoudre $g(x) - f(x) > 2$

Besoin de plus d'entraînement ?

1) Résoudre

a. $2x+1 \geq 0$ b. $5-2x > 1$

2) Soient $h(x) = -3-4x$ et $i(x) = 4x$

a) Résoudre $i(x) \geq -4$

b) Déterminer l'intervalle sur lequel h est négative ?

c) Résoudre $h(x) + i(x) > 0$

Exercice 16 : Résoudre une inéquation (TdS)

Résoudre à l'aide d'un tableau de signe :

a) $(2x-6)(4-4x) > 0$ b) $\frac{4x}{6-2x} \leq 0$

c) $-5x(2x+5) < 0$ d) $\frac{(2-2x)(x+3)}{x-1} \leq 0$

e) $-2x(x-2)(8-2x)^2 > 0$

Besoin de plus d'entraînement ?

Résoudre les inéquations :

a) $\frac{2x-3}{10-2x} \geq 0$ b) $\frac{3x}{x-1} \leq 0$

c) $(1-2x)(4+x)^2 > 0$ d) $\frac{5(2x+1)(5-3x)}{-3(1-x)^2} \geq 0$

Exercice 17 : Factoriser pour résoudre

1) On donne les fonctions suivantes : $f(x) = 4x^2 - 9$
 $g(x) = 5x^2 - 10x$ et $h(x) = (2x - 1)(2 - x) - (2 - x)^2$

- a) Factoriser $f(x)$ pour résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$
 b) Factoriser $g(x)$ pour résoudre l'équation $g(x) = 0$
 c) Factoriser $h(x)$ pour en déterminer le tableau de signes

2) On donne la fonction $k(x) = \frac{9x^2 - 6x + 1}{4x^2 - x}$

- a) Factoriser le numérateur et le dénominateur de $k(x)$
 b) Déterminer le domaine de définition de la fonction k
 c) Résoudre à l'aide d'un tableau de signe l'inéquation $k(x) < 0$

Besoin de plus d'entraînement ?

On donne : $k(x) = \frac{3x - 9x^2}{2 - x}$

- a) Factoriser le numérateur
 b) Déterminer le domaine de définition de la fonction k
 c) Résoudre à l'aide d'un tableau de signe l'inéquation $k(x) \geq 0$

Exercice 18 : Mettre au même dénominateur pour résoudre

On donne : $f(x) = 3 - \frac{6}{x}$ et $g(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+3}$

- a) Déterminer le domaine de définition de f et g
 b) Écrire les fonctions f et g sous la forme d'une seule fraction (*i.e.* mettre au même dénominateur)
 c) Résoudre à l'aide d'un tableau de signes les inéquations $f(x) < 0$ et $g(x) \geq 0$

Besoin de plus d'entraînement ?

On donne : $h(x) = \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x-3}$

- a) Déterminer le domaine de définition de h
 b) Écrire la fonction h sous la forme d'une seule fraction (*i.e.* mettre au même dénominateur)
 c) Résoudre à l'aide d'un tableau de signes les inéquations $h(x) < 0$

Exercice 19 : Ramener à zéro pour résoudre

Ramener à 0, mettre au même dénominateur (*si besoin*), factoriser (*si besoin*), faire un tableau de signe (*si besoin*) et résoudre :

- a) $x^2 + 1 < 2x$ b) $\frac{1}{x+2} \geq -3$
 c) $(2x - 1)^2 > (1 - 3x)^2$ d) $\frac{3x+6}{3x} < \frac{x+2}{x-1}$

Besoin de plus d'entraînement ?

Résoudre...

- a) $x^3 + 2x < 0$ b) $\frac{1}{x} < 4x$
 c) $(2 - x)(3x + 6) \leq (3x + 6)$
 d) $\frac{2(x+1)}{(1-x)^2} \geq 2$

Exercice 20 : Synthèse 1 (un classique)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x + 1)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1)$

- 1) a) Développer et réduire $f(x)$ b) Montrer que $f(x) = 4 - (3x - 1)^2$
 c) Montrer que $f(x) = 3(3x + 1)(1 - x)$
- 2) Répondre aux questions suivantes en utilisant l'expression de f la plus adaptée
- a) Résoudre $f(x) = 0$ b) Calculer $f(0)$ c) Calculer $f(1)$
 d) Résoudre $f(x) = 4$ e) Résoudre $f(x) < -12$

Exercice 21 : Synthèse 2 - Position relative de deux courbes

Point méthode

Pour déterminer la **position relative** de deux courbes, par exemple de la courbe de la fonction f et de celle de la fonction g il faut étudier **le signe de $f - g$**

Si $f(x) - g(x) > 0$, la courbe de f est **au dessus** de celle de g

Si $f(x) - g(x) < 0$, la courbe de f est **en dessous** de celle de g

Si $f(x) - g(x) = 0$, les deux courbes sont **confondues**

On donne les fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$g(x) = 2x^2 + x - 5$$

$$h(x) = 1 - 8x$$

$$k(x) = x - 8$$

a) Résoudre $f(x) < g(x)$

b) Pour quelles valeurs de x la courbe de f est-elle en dessous de la courbe de h

c) Étudier la position relative des courbes de h et de k

d) Étudier la position relative des courbes de g et de k

Exercice 22 : Synthèse 3 - Étude d'une fonction homographique

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 3 - \frac{x-2}{6-x}$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f

2. a) Montrer que, pour $x \in D_f$, on a :

$$f(x) = \frac{-4x + 20}{6 - x}$$

b) Résoudre $f(x) = 0$

3. a) Déterminer par le calcul le tableau de signe de la fonction f

b) Résoudre $f(x) \geq 0$

On donne la courbe représentative de f sur le graphique ci-contre.

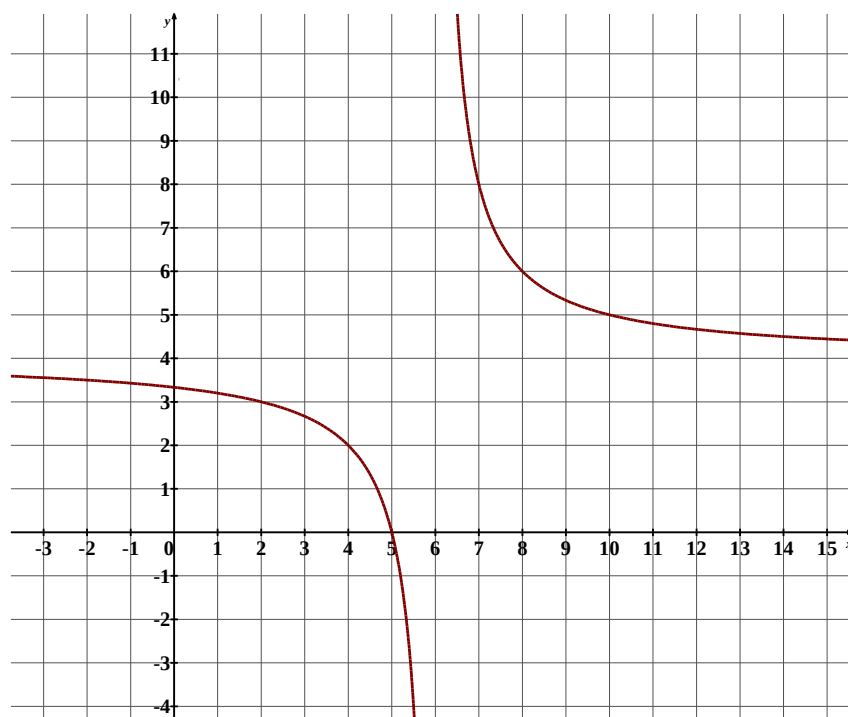
4. La fonction g est définie par :

$$g(x) = \frac{x}{4} + 1$$

a) Tracer la représentation de g dans le même graphique, en donnant sur votre copie la méthode utilisée.

b) Résoudre graphiquement : $f(x) \leq g(x)$

c) Retrouver le résultat de la question (4.b) par le calcul



CORRECTIONS



Corrections Savoir Ta. 5

Corrigé Exercice 1

1)

$$A = 4x(2x - 1)$$

$$B = 5(1 + 3x)$$

$$C = 3(3 - x^2)$$

$$D = x(-12x + 7)$$

$$E = 5x(1 - x)$$

$$F \text{ non factorisable}$$

$$H = a(-7b + 2a)$$

$$J = -5x(2x^2 + 5)$$

2)

$$R = 2(x^2 - 11x - 1) \quad S = 4(x - 1 + x^2) \quad T = 2x(2x^2 - 3x + 4) \quad U = 5x^2(3x^2 - 2x + 1)$$

Corrigé Exercice 2

1)

$$A = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x$$

$$B = 5x + \frac{2}{7}x$$

$$C = \frac{2a}{3} - 4a$$

$$D = \frac{x}{5} + \frac{3x}{2}$$

$$E = n - \frac{4n}{3}$$

$$A = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)x$$

$$B = \left(5 + \frac{2}{7}\right)x$$

$$C = \left(\frac{2}{3} - 4\right)a$$

$$D = \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{2}\right)x$$

$$E = \left(1 - \frac{4}{3}\right)n$$

$$A = \frac{1}{3}x$$

$$B = \frac{37}{7}x$$

$$C = -\frac{10}{3}a$$

$$D = \frac{17}{10}x$$

$$E = -\frac{1}{3}n$$

2)

$$F = (1 - 3)\sqrt{7}$$

$$G = \left(\frac{3}{4} - 1\right)\pi$$

$$H = (12 - 6x)\sqrt{x}$$

$$I = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)\pi$$

$$J = \left(3 - \frac{2}{5}\right)\sqrt{2}$$

$$F = -2\sqrt{7}$$

$$G = -\frac{1}{4}\pi$$

$$I = \frac{5}{12}\pi$$

$$J = \frac{13}{5}\sqrt{2}$$

Corrigé Exercice 3

$$1) A = 2(2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad B = 2(-x^2 + \frac{1}{2}x - 2)$$

$$2) A = -(-4x^2 + 5x - 1) \quad \text{et} \quad B = -(2x^2 - x + 4)$$

$$3) A = x(4x - 5 + \frac{1}{x}) \quad \text{et} \quad C = x(x^2 + 3x - 8 + \frac{4}{x})$$

$$4) B = x^2(-2 + \frac{x}{x^2} - \frac{4}{x^2}) = x^2(-2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}) \quad \text{et} \quad C = x^2(x + 3 - \frac{8x}{x^2} + \frac{4}{x^2}) = x^2(x + 3 - \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2})$$

Corrigé Exercice 4

1)

$$A = 2x + x(3x + 1)$$

$$A = x(2 + (3x + 1))$$

$$A = x(3x + 3) = 3x(x + 1)$$

$$B = x^3(x - 2) - x^3(5x + 1)$$

$$B = x^3((x - 2) + (5x + 1))$$

$$B = x^3(6x - 1)$$

$$C = (3x + 7)(2 - 5x) + (3x + 7)(x + 6)$$

$$C = (3x + 7)((2 - 5x) + (x + 6))$$

$$C = (3x + 7)(-4x + 8) = -4(3x + 7)(x - 2)$$

$$D = (x + 3)^2 + (5 - 2x)(x + 3)$$

$$D = (x + 3)((x + 3) + (5 - 2x))$$

$$D = (x + 3)(-x + 8)$$

Corrigé Exercice 4bis

2)

$$E = (6x + 2)(5 - 2x) - (6x + 2)(7x - 3)$$

$$E = (6x + 2)((5 - 2x) - (7x - 3))$$

$$E = (6x + 2)(5 - 2x - 7x + 3)$$

$$E = (6x + 2)(-9x + 8) = 2(3x + 1)(-9x + 8)$$

$$F = (x + 3)(2x - 5) + 2(3x + 6)(x + 3)$$

$$F = (x + 3)((2x - 5) + 2(3x + 6))$$

$$F = (x + 3)(2x - 5 + 6x + 12)$$

$$F = (x + 3)(8x + 7)$$

$$G = (n + 1)(n - 1) - 2(n - 1)(2n + 6)$$

$$G = (n - 1)((n + 1) - 2(2n + 6))$$

$$G = (n - 1)(n + 1 - 4n - 12)$$

$$G = (n - 1)(-3n - 11) = -(n - 1)(3n + 11)$$

$$H = (2x + 3) - (2x + 3)(5x + 7)$$

$$H = (2x + 3)(1 - (5x + 7))$$

$$H = (2x + 3)(1 - 5x - 7)$$

$$H = (2x + 3)(-5x - 6) = -(2x + 3)(5x + 6)$$

$$I = (4 - 6x)(4 + 6x) - (4 - 6x)^2$$

$$I = (4 - 6x)((4 + 6x) - (4 - 6x))$$

$$I = (4 - 6x)(4 + 6x - 4 + 6x)$$

$$I = (4 - 6x)12x = 24x(2 - 3x)$$

$$J = x^3 + x^3(x - 2)$$

$$J = x^3(1 + (x - 2))$$

$$J = x^3(x - 1)$$

$$K = (2x - 1)(4 + x) + x(4 + x)$$

$$K = (4 + x)((2x - 1) + x)$$

$$K = (4 + x)(3x - 1)$$

$$L = (2x + 5) + (2x + 5)^2$$

$$L = (2x + 5)(1 + (2x + 5))$$

$$L = (2x + 5)(2x + 6)$$

$$M = (3x - 4)(2x - 1) + (-1 + 2x)(2 + 5x)$$

$$M = (2x - 1)((3x - 4) + (2 + 5x))$$

$$M = (2x - 1)(8x - 2) = 2(2x - 1)(4x - 1)$$

$$N = (5t + 3)^2 + 3(5t + 3)(7t - 2)$$

$$N = (5t + 3)((5t + 3) + 3(7t - 2))$$

$$N = (5t + 3)(5t + 3 + 21t - 6)$$

$$N = (5t + 3)(26t - 3)$$

$$O = (1 + 3x)^2 + (1 + 3x)$$

$$O = (1 + 3x)((1 + 3x) + 1)$$

$$O = (1 + 3x)(1 + 3x + 1)$$

$$O = (1 + 3x)(3x + 2)$$

$$P = (4 - 3x)(1 + 2x) - (1 + 2x)^2$$

$$P = (1 + 2x)((4 - 3x) - (1 + 2x))$$

$$P = (1 + 2x)(4 - 3x - 1 - 2x)$$

$$P = (1 + 2x)(-5x + 3)$$

$$Q = (6 - 2x)(5x + 4) + 3(3 + 2x)(6 - 2x)$$

$$Q = (6 - 2x)((5x + 4) + 3(3 + 2x))$$

$$Q = (6 - 2x)(5x + 4 + 9 + 6x)$$

$$Q = (6 - 2x)(11x + 13) = 2(3 - x)(11x + 13)$$

Corrigé Exercice 5

$$1) a) (2x - 1)(6 + x) + (4x - 3)(2x - 1) = (2x - 1)((6 + x) + (4x - 3)) = (2x - 1)(5x + 3)$$

$$b) C = (2x - 1)(6 + x) + (4x - 3)(2x - 1) - 2(5x + 3)^2$$

$$C = (2x - 1)(5x + 3) - 2(5x + 3)^2$$

$$C = (5x + 3)((2x - 1) - 2(5x + 3))$$

$$C = (5x + 3)(2x - 1 - 10x - 6)$$

$$C = (5x + 3)(-8x - 7)$$

$$2) a) A + 2B = (3 - 2x)(5x - 1) + 2((5x - 1)^2)$$

$$= 15x - 3 - 10x^2 + 2x + 2(25x^2 - 10x + 1)$$

$$= -10x^2 + 17x - 3 + 50x^2 - 20x + 2$$

$$= 40x^2 - 3x - 1$$

$$b) A - B = (5x - 1)^2 - (3 - 2x)(5x - 1)$$

$$= (5x - 1)((5x - 1) - (3 - 2x))$$

$$= (5x - 1)(5x - 1 - 3 + 2x)$$

$$= (5x - 1)(7x - 4)$$

Corrections Savoir Ta. 6

Corrigé Exercice 6

$$A_1 = (3x + 2)(3x - 2) \quad A_2 = (4x + 1)(4x - 1)$$

A_3 non factorisable
(c'est un $a^2 + b^2$)

$$A_4 = (5 + 6x)(5 - 6x)$$

$$A_5 = (x + 1)(x - 1) \quad A_6 = (7x + 4)(-7x + 4)$$

$$A_7 = (9 + 3a)(-9 + 3a) \quad A_8 \text{ non factorisable (c'est un } -a^2 - b^2)$$

$$A_9 = (x^2 + x)(x^2 - x) \quad A_{10} = (\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1)$$

Pas obligatoire, ce n'est pas un carré parfait

$$A_{11} = 2(1 - 4x^2) \quad A_{12} = (\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} + x)$$

$A_{11} = 2(1 + 2x)(1 - 2x)$ Pas obligatoire, ce n'est pas un carré parfait

Corrigé Exercice 7

$$B_1 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$a = 2x ; b = 3 \text{ et } 2ab = 12x$$

$$B_1 = (2x + 3)^2$$

$$B_2 = 9x^2 - 6x + 1$$

$$a = 3x ; b = 1 \text{ et } 2ab = 6x$$

$$B_2 = (3x - 1)^2$$

B_3 Non factorisable :
c'est un $a^2 - 2ab - b^2$

$$B_4 = 25x^2 - 10x + 4$$

$$a = 5x ; b = 2 \text{ et } 2ab = 20x$$

Non factorisable : c'est un $a^2 - ab + b^2$

$$B_5 = 64 + 32x + 4x^2$$

$$a = 8 ; b = 2x \text{ et } 2ab = 32x$$

$$B_5 = (8 + 2x)^2$$

$$B_6 = 9x^2 - 18x + 4$$

$$a = 3x ; b = 2 \text{ et } 2ab = 12x$$

Non factorisable : On n'a pas le $2ab$

B_7 Non factorisable :
c'est un $a^2 - ab + b^2$

$$B_8 = (x - 9)^2$$

$$B_9 = (x + 4)^2$$

$$B_{10} = (x^2 - 1)^2$$

Corrigé Exercice 8

$$A = \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{5}\right)$$

$$B = \left(\frac{x}{2} + 3\right)^2$$

$$C = \left(1 + \frac{2x}{3}\right)\left(1 - \frac{2x}{3}\right)$$

$$D = \left(\frac{5}{x} + 3\right)\left(\frac{5}{x} - 3\right)$$

$$E = \left(2x + \frac{3}{4}\right)\left(2x - \frac{3}{4}\right)$$

$$F = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2$$

Corrigé Exercice 9

$$C_1 = 9x^2 - (x+2)^2$$

$$C_1 = (3x + (x+2))(3x - (x+2))$$

$$C_1 = (3x + x + 2)(3x - x - 2)$$

$$C_1 = (4x + 2)(2x - 2) = 4(2x + 1)(x - 1)$$

$$C_2 = (7 - x)^2 - 1$$

$$C_2 = (7 - x + 1)(7 - x - 1) = (8 - x)(6 - x)$$

$$C_3 = 64 - (2x - 1)^2$$

$$C_3 = (8 + (2x - 1))(8 - (2x - 1))$$

$$C_3 = (8 + 2x - 1)(8 - 2x + 1)$$

$$C_3 = (7 + 2x)(9 - 2x)$$

$$C_4 = (2x - 3)^2 - (3 - 4x)^2$$

$$C_4 = ((2x - 3) + (3 - 4x))((2x - 3) - (3 - 4x))$$

$$C_4 = (2x - 3 + 3 - 4x)(2x - 3 - 3 + 4x)$$

$$C_4 = -2x(6x - 6) = -12x(x - 1)$$

$$C_5 = (x + 1)^2 - (2 + 3x)^2$$

$$C_5 = ((x + 1) + (2 + 3x))((x + 1) - (2 + 3x))$$

$$C_5 = (x + 1 + 2 + 3x)(x + 1 - 2 - 3x)$$

$$C_5 = (4x + 3)(-2x - 1) = -(4x + 2)(2x + 1)$$

$$C_7 = 4 - (6x - 1)^2$$

$$C_7 = (2 + 6x - 1)(2 - 6x + 1)$$

$$C_7 = (6x + 1)(3 - 6x)$$

$$C_7 = 3(6x + 1)(1 - 2x)$$

$$C_8 = (2x + 3)^2 - 16x^2$$

$$C_8 = (2x + 3 + 4x)(2x + 3 - 4x)$$

$$C_8 = (6x + 3)(-2x + 3)$$

$$C_8 = 3(2x + 1)(-2x + 3)$$

$$C_9 = (4x - 1)^2 - (x - 3)^2$$

$$C_9 = (4x - 1 + x - 3)(4x - 1 - x + 3)$$

$$C_9 = (5x - 4)(3x + 2)$$

$$C_{10} = (x - 5)^2 - (x + 4)^2$$

$$C_{10} = (x - 5 + x + 4)(x - 5 - x - 4)$$

$$C_{10} = (2x - 1)(-9) = -9(2x - 1)$$

$$C_6 = (2x - 3)^2 - (4 + x)^2$$

$$C_6 = ((2x - 3) + (4 + x))((2x - 3) - (4 + x))$$

$$C_6 = (2x - 3 + 4 + x)(2x - 3 - 4 - x)$$

$$C_6 = (3x + 1)(x - 7)$$

Corrigé Exercice 10

1) a) $9x^2 - 25 = (3x + 5)(3x - 5)$

b) $B = (3x + 5)(3x - 5) - (5x - 2)(3x + 5)$
 $B = (3x + 5)(3x - 5 - 5x + 2) = (3x + 5)(8x - 3)$

2) a) $1 - 4x^2 = (1 + 2x)(1 - 2x)$

b) $D = (1 + 2x)(1 - 2x) + (x - 2)(2x - 1)$
 $D = (1 + 2x)(1 - 2x) - (x - 2)(-2x + 1)$
 $D = (1 - 2x)(1 + 2x - x + 2) = (1 - 2x)(x + 3)$

Corrigé Exercice 11

$$A = 3x^2 - 12x^3 = 3x^2(1 - 4x) \quad B = 4y^2 + 36 = 4(y^2 + 9)$$

$$D = x^2 + 2x + 1 - 3(x - 1)(x + 1)$$

$$D = (x + 1)^2 - 3(x - 1)(x + 1)$$

$$D = (x + 1)(x + 1 - 3x + 3)$$

$$D = (x + 1)(-2x + 4) = 2(x + 1)(2 - x)$$

$$E = (x + 2)^2 - (2x - 3)(2x - 3)$$

$$E = (x + 2 + 2x - 3)(x + 2 - 2x + 3)$$

$$E = (3x - 1)(-x + 5)$$

$$G = -4x^2 + 9 = (2x + 3)(-2x + 3)$$

$$I = 4x^2 - 1 - (x + 7)(1 - 2x)$$

$$I = (2x + 1)(2x - 1) - (x + 7)(1 - 2x)$$

$$I = (2x + 1)(2x - 1) + (x + 7)(-1 + 2x)$$

$$I = (2x - 1)(2x + 1 + x + 7)$$

$$I = (2x - 1)(3x + 8)$$

$$K = 4y^2 - 2y = 2y(2y - 1)$$

$$C = x + 3 - 2(x + 3)(5 - x)$$

$$C = (x + 3)(1 - 2(5 - x))$$

$$C = (x + 3)(1 - 10 + 2x) = (x + 3)2x - 9$$

$$F = 10a^2 - 5a = 5a(2a - 1)$$

$$H = (3x + 2) - 2(3x + 2)(1 - x)$$

$$H = (3x + 2)(1 - 2(1 - x))$$

$$H = (3x + 2)(1 - 2 + 2x)$$

$$H = (3x + 2)(2x - 1)$$

$$J = (n + 1)^2 - 9(n - 2)^2$$

$$J = (n + 1 + 3(n - 2))(n + 1 - 3(n - 2))$$

$$J = (n + 1 + 3n - 6)(n + 1 - 3n + 6)$$

$$J = (4n - 5)(7 - 2n)$$

$$L = 1 - 4(x + 3)^2$$

$$L = (1 + 2(x + 3))(1 - 2(x + 3))$$

$$L = (1 + 2x + 6)(1 - 2x - 6)$$

$$L = (2x + 7)(-2x - 5)$$

Corrections Savoir Ta. 7

Corrigé Exercice 12

1)

$$A_1 = x \quad A_2 = x^2 \quad A_3 = \frac{1}{x^3} \quad A_4 = \frac{1}{n^4}$$

$$A_5 = 3x \quad A_6 = \frac{1}{5a^2} \quad A_7 = \frac{a}{b^3} \quad A_8 = \frac{3}{2y}$$

$$A_9 = \frac{1}{x} \quad A_{10} = x^3 \quad A_{11} = 3x^8$$

$$A_{12} = \frac{2}{n^2} \quad A_{13} = \frac{5a}{b^2} \quad A_{14} = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

2)

$$B_1 = \frac{4x-6}{-2} = \frac{4x}{-2} - \frac{6}{-2} = -2x + 3$$

$$B_2 = \frac{2x-5}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{5}{x} = 2 - \frac{5}{x}$$

$$B_3 = \frac{5x^2-4x}{x^2} = \frac{5x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} = 5 - \frac{4}{x}$$

$$B_4 = \frac{4x^2+6x-1}{2x} = \frac{4x^2}{2x} + \frac{6x}{2x} - \frac{1}{2x} = 2x + 3 - \frac{1}{2x}$$

$$B_5 = \frac{n^2-4}{n^3} = \frac{n^2}{n^3} - \frac{4}{n^3} = \frac{1}{n} - \frac{4}{n^3}$$

$$B_6 = \frac{3a^2b-2b^2}{6ab} = \frac{3a^2b}{6ab} - \frac{2b^2}{6ab} = \frac{a}{2} - \frac{b}{3a}$$

$$B_7 = \frac{5-2x}{-x} = -\frac{5}{x} + 2$$

$$B_8 = \frac{4x^2-2}{4x} = x - \frac{1}{2x}$$

$$B_9 = \frac{n^4-3n}{n^2} = 2 = n^2 - \frac{3}{n}$$

$$B_{10} = \frac{x^2y+2xy-4xy^2}{2x^2y^2}$$

$$= \frac{x^2y}{2x^2y^2} + \frac{2xy}{2x^2y^2} - \frac{4xy^2}{2x^2y^2}$$

$$= \frac{1}{2y} + \frac{1}{xy} - \frac{2}{x}$$

Corrigé Exercice 13

$$C_1 = \frac{2x(x+3)}{2x} = x + 3$$

$$C_2 = \frac{5+x}{5} \quad \text{Non simplifiable (somme)}$$

$$C_3 = \frac{3x+1}{5(3x+1)} = \frac{1}{5}$$

$$C_4 = \frac{4x-5}{(4x-5)^2} = \frac{1}{4x-5}$$

$$C_5 = \frac{(2x-1)-3x}{2x-1} \quad \text{Non simplifiable (somme)} : C_5 = \frac{-3x-1}{2x-1}$$

$$C_6 = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$C_7 = \frac{4x^2(3x-4)}{2x(4-3x)} = \frac{-2x \times 2x(-3x+4)}{2x(-3x+4)} = -2x$$

$$C_8 = \frac{4(x+1)}{x+1} = 4$$

$$C_9 = \frac{2x-3}{-3} \quad \text{Non simplifiable (somme)}$$

$$C_{10} = \frac{4}{3x+4} \quad \text{Non simplifiable (somme)}$$

$$C_{11} = \frac{3x+2}{(3x+2)(3x-2)} = \frac{1}{3x-2}$$

$$C_{12} = \frac{4x+2(2x+3)}{2x+3} \quad \text{Non simplifiable (somme)}$$

$$C_{12} = \frac{4x+4x+6}{2x+3} = \frac{8x+6}{2x+3}$$

$$C_{13} = \frac{3x(x+2)-(5-x)(x+2)}{4(x+2)} \quad \text{À priori, on simplifiable car c'est une somme. Mais il y a le facteur (x+2) dans chaque terme, donc on pourrait factoriser :}$$

$$C_{13} = \frac{3x(x+2)-(5-x)(x+2)}{4(x+2)} = \frac{3x-(5-x)}{4} = \frac{4x-5}{4}$$

Corrigé Exercice 14

$$A = \frac{2x-5}{5-2x} = \frac{-(-2x+5)}{-2x+5} = -1$$

$$B = \frac{5x}{5x^2-15x} = \frac{5x}{5x(x-3)} = \frac{1}{x-3}$$

$$C = \frac{x^2-3x}{1-3x} = \frac{x(x-3)}{1-3x}$$

$$D = \frac{6x-3}{2x-1} = \frac{3(2x-1)}{2x-1} = 3$$

Pas de simplification possible

$$E = \frac{2x+8}{3x^2+12x} = \frac{2(x+4)}{3x(x+4)} = \frac{2}{3x}$$

$$F = \frac{x^3-2x^2}{x(x-2)} = \frac{x^2(x-2)}{x(x-2)} = x$$

$$G = \frac{1-x^2}{1+x} = \frac{(1+x)(1-x)}{1+x} = 1-x$$

$$H = \frac{2x^2+3x}{4x^2-9} = \frac{x(2x+3)}{(2x+3)(2x-3)} = \frac{x}{2x-3}$$

Corrections Savoir Ta. 8

Corrigé Exercice 15

1) a) $3x+4 \leq 16$ $\Leftrightarrow 3x \leq 12$ $\Leftrightarrow x \leq \frac{12}{3}$ $\Leftrightarrow x \leq 4$ S =] - ∞; 4]	b) $\frac{1}{2}x - 3 > 0$ $\Leftrightarrow \frac{x}{2} > 3$ $\Leftrightarrow x > 3 \times 2$ $\Leftrightarrow x > 6$ S =]6; +∞[	c) $1-4x \leq -3$ $\Leftrightarrow -4x \leq -3-1$ $\Leftrightarrow -4x \leq -4$ Attention $\Leftrightarrow x \geq \frac{-4}{-4}$ $\Leftrightarrow x \geq 1$ S = [1; +∞[
---	---	---

2) a) $f(x) < 3 \Leftrightarrow 5x-7 < 3 \Leftrightarrow 5x < 10 \Leftrightarrow x < 2$
S =] - ∞ ; 2[

b) $g(x) \leq -4 \Leftrightarrow -2x-12 \leq -4 \Leftrightarrow -2x \leq -4+12$
 $\Leftrightarrow -2x \leq 8 \Leftrightarrow x \geq \frac{8}{-2} \Leftrightarrow x \geq -4 \Rightarrow \mathbf{S} = [-4; +\infty[$

c) f est positive $\Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 5x-7 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{5}$
 Donc **f** est positive sur $[\frac{7}{5}; +\infty[$

d) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 5x-7 \geq -2x-12 \Leftrightarrow 7x \geq -5$
 $\Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{7} \Rightarrow \mathbf{S} = [-\frac{5}{7}; +\infty[$

e) $g(x) - f(x) > 2 \Leftrightarrow -2x-12 - (5x-7) > 2 \Leftrightarrow -2x-12-5x+7 > 2 \Leftrightarrow -7x > 2+5$
 $\Leftrightarrow x < \frac{7}{-7} \Leftrightarrow x < -1 \Rightarrow \mathbf{S} =]-\infty; -1[$

1) a. $2x+1 \geq 0$
 $\Leftrightarrow 2x \geq -1$
 $\Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$
S = $[-\frac{1}{2}; +\infty[$

b. $5-2x > 1$
 $\Leftrightarrow -2x > 1-5$
 $\Leftrightarrow -2x > -4$
 $\Leftrightarrow x < \frac{-4}{-2}$
 $\Leftrightarrow x < 2$
S =] - ∞ ; 2[

2) a) $i(x) \geq -4 \Leftrightarrow 4x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -1$
S = [-1; + ∞ [

b) h est négative $\Leftrightarrow h(x) \leq 0$
 $\Leftrightarrow -3-4x \leq 0 \Leftrightarrow -4x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{4}$
h est négative sur $[-\frac{3}{4}; +\infty[$

c) $h(x) + i(x) > 0 \Leftrightarrow -3-4x+4x > 0$
 $\Leftrightarrow -3 > 0$ ce qui est toujours faux
 donc **S** = $\emptyset$

Corrigé Exercice 16

a) Définie sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$2x - 6$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$4 - 4x$	$+$	0	$-$	$ $	$-$
Produit	$-$	0	$+$	0	$-$

On cherche la partie où le produit est strictement positif $\Rightarrow S =]1 ; 3[$

b) $\frac{4x}{6-2x} \leq 0$ Définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$4x$	$-$	0	$+$	$ $ $+$
$6 - 2x$	$+$	$ $	$+$	0 $-$
<i>Quotient</i>	$-$	0	$+$	$ $ $-$

On cherche la partie où le quotient est négatif ou nul $S =]-\infty ; 0] \cup]3 ; +\infty[$ (la valeur 3 est interdite)

c) $-5x(2x+5) < 0$ Définie sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	0	$+\infty$	
$-5x$	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$2x + 5$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
Produit	$-$	0	$+$	0	$-$

On cherche la partie où le produit est strictement négatif $\Rightarrow S =]-\infty ; -\frac{5}{2}[\cup]0 ; +\infty[$

d) $\frac{(2-2x)(x+3)}{(x-1)} \leq 0$ Définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$2 - 2x$	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$x - 1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$
<i>Quotient</i>	$+$	0	$-$	$ $	$-$

On cherche le quotient négatif ou nul $S = [-3 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ (la valeur 1 est interdite)

e) $-2x(x-2)(8-2x)^2 > 0$ Définie sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$-2x$	+	0	-		-
$x - 2$	-		-	0	+
$(8 - 2x)^2$	+		+		+
Produit	-	0	+	0	-

On cherche le produit strictement positif $\Rightarrow S =]0 ; 2[$

a) $\frac{2x-3}{10-2x} \geq 0$ Définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	5	$+\infty$
$2x - 3$	$-$	0	$+$	$+$
$10 - 2x$	$+$	$+$	0	$-$
<i>Quotient</i>	$-$	0	$+$	$-$

On cherche la partie où le quotient est positif ou nul $S = \left[\frac{3}{2} ; 5\right[$ (la valeur 5 est interdite)

b) $\frac{3x}{x-1} \leq 0$ Définie pour $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$3x$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$ $	$-$	0
Q	$+$	0	$-$	$ $

$S = [0 ; 1[$

c) $(1-2x)(4+x)^2 > 0$ Définie sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	-4	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$1-2x$	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$(4+x)^2$	$+$	0	$+$	$ $	$+$
$(1-2x)(4+x)^2$	$+$	0	$+$	0	$-$

$S =]-\infty ; -4[\cup]-\frac{1}{2} ; +\infty[$

d) $\frac{5(2x+1)(5-3x)}{-3(1-x)^2} \geq 0$ Définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$2x + 1$	-	0	+		+
$5 - 3x$	+		+		+
-3	-		-		-
$(1-x)^2$	+		+	0	+
Quotient	+	0	-		-

On cherche le quotient positif ou nul $\Rightarrow S =]-\infty ; -\frac{1}{2}] \cup \left[\frac{5}{3} ; +\infty\right[$

Corrigé Exercice 17

1) a) $f(x) = 4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
$2x - 3$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow S = \left] -\infty ; -\frac{3}{2} \right] \cup \left[\frac{3}{2} ; +\infty \right[$$

b) $g(x) = 5x^2 - 10x = 5x(x - 2)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 5x(x - 2) = 0$ Un produit est nul ...

Soit $5x = 0 \Leftrightarrow x = 0$; Soit $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow S = \{0 ; 2\}$

c) $h(x) = (2x - 1)(2 - x) - 3(2 - x)^2 = (2 - x)((2x - 1) - 3(2 - x))$
 $= (2 - x)(2x - 1 - 6 + 3x) = (2 - x)(5x - 7)$

x	$-\infty$	$\frac{7}{5}$	2	$+\infty$
$2 - x$	$+$	$+$	0	$-$
$5x - 7$	$-$	0	$+$	$+$
$h(x)$	$-$	0	$+$	$-$

2) a) $k(x) = \frac{9x^2 - 6x + 1}{4x^2 - x} = \frac{(3x - 1)^2}{x(4x - 1)}$

c)

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$(3x - 1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$k(x)$	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$

b) La fonction k est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{0 ; \frac{1}{4}\right\}$

$$S = \left] 0 ; \frac{1}{4} \right[$$

Corrigé Exercice 18

a) f est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

et g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3 ; 0\}$

b) $f(x) = \frac{3x - 6}{x} = \frac{3(x - 2)}{x}$

et $g(x) = \frac{2(x + 3) + x}{x(x + 3)} = \frac{3x + 6}{x(x + 3)}$

c)

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$3x - 6$	$-$	$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$+$

$$f(x) < 0 \Rightarrow S =]0 ; 2[$$

c)

x	$-\infty$	-3	-2	0	$+\infty$
$3x + 6$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$+$

a) $k(x) = \frac{3x - 9x^2}{2 - x} = \frac{3x(1 - 3x)}{2 - x}$

b) k est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

c) $k(x) \geq 0$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$3x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1 - 3x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$2 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$k(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$$S = \left[0 ; \frac{1}{3} \right] \cup]2 ; +\infty[$$

a) La fonction h est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 3\}$

b) $h(x) = \frac{2}{x + 2} + \frac{3}{x - 3} = \frac{2(x - 3) + 3(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)}$

$$h(x) = \frac{5x}{(x + 2)(x - 3)}$$

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
$5x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	0	$+$

$$h(x) < 0 \Rightarrow S =]-\infty ; -2[\cup]0 ; 3[$$

$$g(x) \geq 0 \Rightarrow S =]-3 ; -2] \cup]0 ; +\infty[$$

Corrigé Exercice 19

a) $x^2 + 1 < 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 < 0$

Or un carré est toujours positif

$\Rightarrow S = \emptyset$

b) définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$\frac{1}{x+2} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+3(x+2)}{x+2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+7}{x+2} \geq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$	-2	$+\infty$
$3x+7$	$-$	0	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	0	$+$
quotient	$+$	0	$-$	$+$

$$\Rightarrow S =]-\infty; -\frac{7}{3}] \cup]-2; +\infty[$$

c) $(2x-1)^2 > (1-3x)^2$

$$(2x-1)^2 - (1-3x)^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1+1-3x)(2x-1-1+3x) > 0$$

$$\Leftrightarrow -x(5x-2) > 0$$

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$	$-$
$5x-2$	$-$	$-$	0	$+$
produit	$-$	0	$+$	$-$

$$S =]0; \frac{2}{5}[$$

d) définie pour $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+6}{3x} - \frac{x+2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(3x+6)(x-1) - 3x(x+2)}{3x(x-1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3x-6}{3x(x-1)} < 0$$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$-3x-6$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$3x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
Q	$+$	0	$-$	$+$	$-$

$$S =]-2; 0[\cup]1; +\infty[$$

a) $x^3 + 2x < 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2) < 0$

Or $x^2 + 2 > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
x^2+2	$+$	$+$	$+$
produit	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow S =]-\infty; 0[$$

b) définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{x} < 4x \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 4x < 0 \Leftrightarrow \frac{1-4x^2}{x} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1+2x)(1-2x)}{x} < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$1+2x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-2x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
quotient	$+$	0	$-$	$+$	0

$$\Rightarrow S =]-\frac{1}{2}; 0[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$$

c) $(2-x)(3x+6) \leq (3x+6)$

$$\Leftrightarrow (2-x)(3x+6) - (3x+6) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+6)(2-x-1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (3x+6)(-x+1) \leq 0$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$3x+6$	$-$	0	$+$	$+$
$-x+1$	$+$	$+$	0	$-$
produit	$-$	0	$+$	$-$

$$S =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$$

d) définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\frac{2(x+1)}{(1-x)^2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+1) - 2(1-x)^2}{(1-x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-2x^2+6x}{(1-x)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x(-x+3)}{(1-x)^2} \geq 0$$

Attention, un carré est toujours positif

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-x+3$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(1-x)^2$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
Q	$-$	0	$+$	$+$	$-$

$$S = [0; 1[\cup]1; 3]$$

Corrigé Exercice 20

1)

a) $f(x)$ $= (3x + 1)^2 - 2(3x - 1)(3x + 1)$ $f(x) = (9x^2 + 6x + 1) - 2(9x^2 - 1)$ $f(x) = 9x^2 + 6x + 1 - 18x^2 + 2$ $f(x) = -9x^2 + 6x + 3$	b) $4 - (3x - 1)^2$ $= 4 - (9x^2 - 6x + 1)$ $= 4 - 9x^2 + 6x - 1$ $= -9x^2 + 6x + 3$ On a bien $f(x) = 4 - (3x - 1)^2$	c) $3(3x + 1)(1 - x)$ $= 3(-3x^2 + 2x + 1)$ $= -9x^2 + 6x + 3$ On a bien $f(x) = 3(3x + 1)(1 - x)$
--	--	--

2)

a) $f(x) = 0$ Forme factorisée $\Leftrightarrow 3(3x + 1)(1 - x) = 0$ Un produit est nul si un facteur est nul $\Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \text{ ou } 1 - x = 0$ $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 1$ $S = \left\{ -\frac{1}{3}; 1 \right\}$	b) Forme réduite $f(0) = 3$ c) Forme factorisée $f(1) = 3 \times (3+1) \times 0$ $f(1) = 0$	d) $f(x) = 4$ Forme canonique $\Leftrightarrow 4 - (3x - 1)^2 = 4$ $\Leftrightarrow -(3x - 1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow 3x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ $S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$	e) antécédents de 3 par f $\Leftrightarrow \text{Résoudre } f(x) = 3$ Forme réduite $\Leftrightarrow -9x^2 + 6x + 3 = 3$ $\Leftrightarrow -9x^2 + 6x = 0$ On factorise $\Leftrightarrow 3x(-3x + 2) = 0$ $\Leftrightarrow 3x = 0 \text{ ou } -3x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{-2}{-3}$ $S = \left\{ 0; \frac{2}{3} \right\}$
--	---	--	--

e) $f(x) < -12$ **Forme canonique**

$$4 - (3x - 1)^2 < -12 \Leftrightarrow 16 - (3x - 1)^2 < 0 \Leftrightarrow (4 + 3x - 1)(4 - 3x + 1) < 0 \Leftrightarrow (3x + 3)(5 - 3x) < 0$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$3x + 3$		-	0	+
$5 - 3x$	+	+	0	-
produit	-	0	+	-

$$\Rightarrow S =]-\infty; -1[\cup]\frac{5}{3}; +\infty[$$

Corrigé Exercice 21

a) $f(x) < g(x)$

$$2x^2 - 3x + 1 < 2x^2 + x - 5$$

$$-3x - x < -5 - 1$$

$$-4x < -6$$

$$x > \frac{-6}{-4} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$$

$$S = \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$$

b) f est en dessous de h quand $f(x) < h(x)$

i.e. quand $f(x) - h(x) < 0$

$$2x^2 - 3x + 1 - (1 - 8x) < 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 - 1 + 8x < 0$$

$$2x^2 + 5x < 0$$

$$x(2x + 5) < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	0	$+\infty$
x	-	-	0	+
$2x + 5$	-	0	+	+
produit	+	0	-	+

f est en dessous de h quand

$$x \in \left] -\frac{5}{2}; 0 \right[$$

c) $h(x) - k(x)$

$$= 1 - 8x - (x - 8)$$

$$= 9 - 9x$$

On étudie le signe

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$9 - 9x$	+	0	-
$h(x) - k(x)$	+	0	-

Quand $x \in]-\infty; 1[$, la courbe de h est **au dessus** de la courbe de k

Quand $x \in]1; +\infty[$, la courbe de h est **en dessous** de celle de k

$g(x) - k(x)$

$$= 2x^2 + x - 5 - (x - 8)$$

$$= 2x^2 + x - 5 - x + 8$$

$$= 2x^2 + 3$$

Or un carré est toujours positif, et si on ajoute un nombre positif, cela reste positif

$$x^2 > 0 \Rightarrow 2x^2 > 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3 > 3 > 0$$

Donc pour tout x réel, on a toujours

$$g(x) - k(x) > 0$$

La courbe de g est toujours au dessus de celle de k

Corrigé Exercice 23

1. Valeur interdite : $6 - x = 0 \Leftrightarrow x = 6 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{6\}$

2. a) pour $x \in D_f$, on a : $f(x) = 3 - \frac{x-2}{6-x} = \frac{3(6-x) - (x-2)}{6-x} = \frac{18-3x-x+2}{6-x} = \frac{-4x+20}{6-x}$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4x+20}{6-x} = 0 \Rightarrow -4x+20=0 \Leftrightarrow x=5 \Rightarrow S = \{5\}$

3. a)

x	$-\infty$	5	6	$+\infty$
$-4x + 20$	+	0	-	-
$6 - x$	+		+	0
$f(x)$	+	0	-	

b) $f(x) \geq 0 \Rightarrow S =]-\infty ; 5] \cup]6 ; +\infty[$

4. a) Fonction affine de coefficient directeur $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{4}$ et d'ordonnée à l'origine $b = 1$

b) $f(x) \leq g(x) \Rightarrow S = [4 ; 6[\cup]14 ; 15]$

$$\begin{aligned} \text{c) } f(x) \leq g(x) &\Leftrightarrow \frac{-4x+20}{6-x} \leq \frac{x}{4} + 1 \Leftrightarrow \frac{-4x+20}{6-x} - \frac{x}{4} - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4(-4x+20) - x(6-x) - 1 \times 4(6-x)}{4(6-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-16x+80-6x+x^2-24+4x}{4(6-x)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-18x+56}{4(6-x)} \leq 0 \end{aligned}$$

En s'aidant du résultat graphique, on montre que $x^2 - 18x + 56 = (x-4)(x-14)$

En effet : $(x-4)(x-14) = x^2 - 4x - 14x + 56 = x^2 - 18x + 56$

Donc $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-14)}{4(6-x)} \leq 0$

x	$-\infty$	4	6	14	$+\infty$
$x - 4$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$x - 14$	$-$	$ $	$-$	$ $	$+$
$6 - x$	$+$	$ $	$+$	0	$-$
Q	$+$	0	$-$	$ $	$+$

On a $S = [4 ; 6[\cup]14 ; +\infty[$

