

Exercice 14 : Déterminer une limite à partir des définitions

1) Soit $u_n = 2n - 5$ pour tout $n \geq 0$.

a. Résoudre l'inéquation $u_n > S$, où l'inconnue est n et S est un réel donné.

b. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2) Soit $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$.

a. À partir de quel rang n a-t-on $u_n \in]-0,1; 0,1[$?

Même question pour $u_n \in]-10^{-6}; 10^{-6}[$

b. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

Un peu plus...

Soit $v_n = 1 - n^2$ pour tout $n \geq 1$.

a. Résoudre l'inéquation $v_n < S$, où l'inconnue est n et S est un réel donné.

b. Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

Exercice 15 : Algorithmes et limite infinie

Soit la suite $u_n = 3^n$ définie pour tout entier naturel.

a. Quelle est sa limite quand n tend vers $+\infty$?

b. On considère l'algorithme ci-contre.

Compléter le tableau ci-dessous en ajoutant des colonnes jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête.

```
n = 0
while 3**n < 100:
    n = n + 1
print(n)
```

n	0	1	2						
3^n	1								
Test	Vrai								

Quel nombre affiche alors l'algorithme en fin d'exécution ? à quoi correspond-il ?

c. Si on remplace 100 par 1000 dans le test, est-on sûr que l'exécution de l'algorithme s'arrête ? Justifier.

Exercice 16 : Algorithmes et limite finie

1) Soit la suite $u_n = \frac{1}{3n^2}$ définie pour tout entier naturel non nul.

a. Quelle est sa limite quand n tend vers $+\infty$?

b. On considère la fonction Python ci-contre.

On exécute l'instruction : $m = R(2)$.

Expliciter cette exécution en complétant le tableau ci-dessous en ajoutant des colonnes jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête (arrondis à 10^{-4}).

```
def R(p):
    n = 1
    while 1/(3*n**2) > 10**(-p):
        n = n + 1
    return n
```

n	1	2	3						
$\frac{1}{3n^2}$	0,3333								
Test	Vrai								

Quel est le nombre présent dans la variable m à la fin de l'exécution ? à quoi correspond-il ?

c. Si on exécute $m = R(8)$, est-on sûr que l'exécution de l'algorithme s'arrête ? Justifier.

2) On définit la suite (v_n) par $v_0 = 4$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n + 2$

a. On donne la feuille de calcul ci-contre.

Quelle formule a-t-on entrée dans la case B3 pour, une fois recopiée vers le bas, obtenir les termes de la suite

Que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (v_n) ?

b. On donne l'algorithme ci-contre, où **abs()** désigne la fonction valeur absolue.

Quelle valeur affiche cet algorithme en fin d'exécution ?

```
n = 0
U = 4

while abs(U - 8) > 0.1:
    U = 3/4*U + 2
    n = n + 1

print(n)
```

	A	B
1	n	vn
2	0	4
3	1	5
4	2	5,75
5	3	6,3125
6	4	6,734375
7	5	7,05078125
8	6	7,28808594
9	7	7,46606445
10	8	7,59954834
11	9	7,69966125
12	10	7,77474594
13	11	7,83105946
14	12	7,87329459
15	13	7,90497094
16	14	7,92872821
17	15	7,94654616
18	16	7,95990962
19	17	7,96993221
20	18	7,97744916
21	19	7,98308687
22	20	7,98731515
23	21	7,99048636
24	22	7,99286477

Un sujet de bac : Antilles-Guyane (juin 2014)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$.

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n)

3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n)

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n)

b. En déduire, que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2
Traitement :	Tant que ... (1) n prend la valeur ... (2) u prend la valeur ... (3) Fin Tant que
Sortie :	Afficher n