

Sujets 2022

Polynésie - 1 - Mai 2022

Le sujet propose 4 exercices

Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et ne doit traiter que ces 3 exercices

Exercice 1

7 points

Thèmes : fonctions, suites

Cette exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction g définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

Pour tout nombre réel x strictement positif :

a. $g'(x) = \frac{1}{2x+1}$

b. $g'(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

c. $g'(x) = \ln(2x + 1)$

d. $g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

2. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ admet pour primitive sur $]0 ; +\infty[$ la fonction :

a. $x \mapsto \ln(x)$

b. $x \mapsto \frac{1}{x}$

c. $x \mapsto x \ln(x) - x$

d. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

3. On considère la suite (a_n) définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par : $a_n = \frac{1-3^n}{1+2^n}$

La limite de la suite (a_n) est égale à :

a. $-\infty$

b. -1

c. 1

d. $+\infty$

4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2 ; 2]$. Le tableau de variations de la fonction f' dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ est donné par :

x	-2	-1	0	2
variations de f'	1	0	-2	-1

La fonction f est :

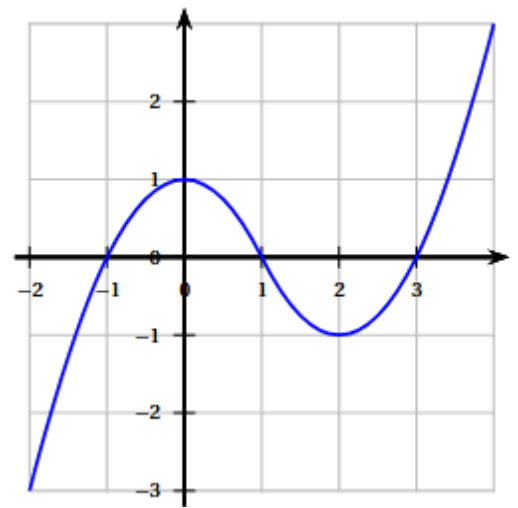
a. convexe sur $[-2 ; -1]$

b. concave sur $[0 ; 1]$

c. convexe sur $[-1 ; 2]$

d. concave sur $[-2 ; 0]$

5. On donne ci-contre la courbe représentative de la dérivée f' d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.
Par lecture graphique de la courbe de f' , déterminer l'affirmation correcte pour f :



- a. f est décroissante sur $[0 ; 2]$
- b. f est décroissante sur $[-1 ; 0]$
- c. f admet un maximum en 1 sur $[0 ; 2]$
- d. f admet un maximum en 3 sur $[2 ; 4]$

6. Une action est cotée à 57 €.
Sa valeur augmente de 3 % tous les mois.
La fonction python **seuil()** qui renvoie le nombre de mois à attendre pour que sa valeur dépasse 200 € est :

a.

```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v < 200 :
        m=m+1
        v = v*1.03
    return m
```

b.

```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v > 200 :
        m=m+1
        v = v*1.03
    return m
```

c.

```
def seuil() :
    v=57
    for i in range (200) :
        v = v*1.03
    return v
```

d.

```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    if v < 200 :
        m=m+1
    else :
        v = v*1.03
    return m
```

Exercice 2 7 points

Thèmes : probabilités

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.
Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie.
Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.
On considère les évènements suivants :

- M « la personne est malade » ;
- T « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, et de 0,0653.
3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?
4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.
- a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
 - b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.
On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieur à 99 %

Exercice 3 7 points

Thèmes : suites

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1. a. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

- b. Recopier le script python ci-contre et compléter les lignes 3 et 6 pour que **liste(k)** prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k .

1.	def liste(k) :
2.	<code>L = []</code>
3.	<code>u = ...</code>
4.	for i in range(0, k+1) :
5.	<code>L.append(u)</code>
6.	<code>u = ...</code>
7.	return(L)

2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. Déterminer la valeur de sa limite.

5. a. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .

- b. Démontrer par récurrence la conjecture précédente

Exercice 4**7 points****Thèmes : géométrie dans le plan et dans d'espace**

L'espace est rapporté un repère orthonormal où l'on considère :

- les points $A(2 ; -1 ; 0)$, $B(1 ; 0 ; -3)$, $C(6 ; 6 ; 1)$ et $E(1 ; 2 ; 4)$;
- Le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.

1. a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ puis les longueurs BA et BC .

c. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondie au degré.

2. a. Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ est parallèle au plan (ABC) .

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E .

d. Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4 ; \frac{1}{2} ; \frac{5}{2}\right)$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $V = \frac{1}{3}Bh$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.

Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide à base $ABCE$ est égal à 16, 5 unités de volume.

Le sujet propose 4 exercices
Le candidat choisit 3 exercices parmi les 4 et ne doit traiter que ces 3 exercices

Exercice 1

7 points

Thèmes : fonctions, primitives, probabilités

Cette exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des six questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x) - x + 1$.

Parmi les quatre expressions suivantes, laquelle est celle de la fonction dérivée de f ?

- a. $\ln(x)$ b. $\frac{1}{x} - 1$ c. $\ln(x) - 2$ d. $\ln(x) - 1$

2. On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = x^2[1 - \ln(x)]$.

Parmi les quatre affirmations suivantes, laquelle est correcte ?

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ c. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

d. La fonction g n'admet pas de limite en 0.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 0,9x^2 - 0,1x$.

Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$ est :

- a. 0 b. 1 c. 2 d. 3

4. Si H est une primitive d'une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$, et si k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = h(2x)$, alors, une primitive K de k est définie sur $\mathbb{R}$ par :

- a. $K(x) = H(2x)$ b. $K(x) = 2H(2x)$ c. $K(x) = \frac{1}{2}H(2x)$ d. $K(x) = 2H(x)$

5. L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ est :

- a. $y = ex + e$ b. $y = 2ex - e$ c. $y = 2ex + e$ d. $y = ex$

6. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $(0,2)^n < 0,001$ sont tous les nombres entiers n tels que :

- a. $n \leq 4$ b. $n \leq 5$ c. $n \geq 4$ d. $n \geq 5$

Exercice 2

7 points

Thèmes : probabilités

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les événements suivants :

- C : « le casque est contrefait » ;
- D : « le casque présente un défaut de conception » ;
- $\bar{C}$ et $\bar{D}$ désignent respectivement les événements contraires de C et D .

Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} si nécessaire.

Partie 1

1. Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(D) = 0,036$.
3. Le casque a un défaut. Quelle est la probabilité qu'il soit contrefait ?

Partie 2

On commande n casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans ce lot.

1. Dans cette question, $n = 35$.
 - a. Justifier que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ où $n = 35$ et $p = 0,036$.
 - b. Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception.
 - c. Calculer $P(X \leq 1)$.
2. Dans cette question, n n'est pas fixé.

Quel doit être le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieur à 0,99 ?

Exercice 3**7 points****Thèmes : Suites, fonctions**

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 40 \\ u_{n+1} = 0,008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 100]$ l'équation $f(x) = x$.
3.
 - a. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 100]$ et dresser son tableau de variations.
 - b. En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - d. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant :
L'exécution de **seuil(100)** ne renvoie aucune valeur.
Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

```
def seuil(p) :  
    n=0  
    u = 40  
    while u < p :  
        n =n+1  
        u = 0.008*u*(200-u)  
    return(n+2021)
```

Exercice 4

7 points

Thèmes : géométrie dans le plan et dans d'espace

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(A ; AB, AD, AE)$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$,
 K le centre du carré $ADHE$ et O le milieu du segment $[AG]$

Le but de l'exercice est de calculer de deux manières différentes, la distance du point B au plan (AIG) .

Partie 1. Première méthode

1. Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B , et G .

On admet que les points I et K ont pour coordonnées $I\left(\frac{1}{2} ; 0 ; 1\right)$ et $K\left(0 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

2. Démontrer que la droite (BK) est orthogonale au plan (AIG) .

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (AIG) est : $2x - y - z = 0$.

4. Donner une représentation paramétrique de la droite (BK) .

5. En déduire que le projeté orthogonal L du point B sur le plan (AIG) a pour coordonnées $L\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

6. Déterminer la distance du point B au plan (AIG) .

Partie 2. Deuxième méthode

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

1. a. Justifier que dans le tétraèdre $ABIG$, $[GF]$ est la hauteur relative à la base AIB .

b. En déduire le volume du tétraèdre $ABIG$.

2. On admet que $AI = IG = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et que $AG = \sqrt{3}$.

Démontrer que l'aire du triangle isocèle AIG est égale à $\frac{\sqrt{6}}{4}$ unité d'aire.

3. En déduire la distance du point B au plan (AIG)

