

Sujet d'entraînement n°2

Exercice 5

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DH})$

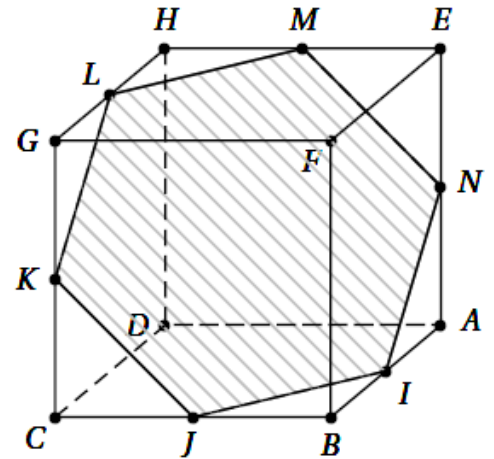
Dans ce repère, on a :

$D(0 ; 0 ; 0)$, $C(1 ; 0 ; 0)$, $A(0 ; 1 ; 0)$, $H(0 ; 0 ; 1)$ et $E(0 ; 1 ; 1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I .

On admet que la section du cube par le plan $\mathcal{P}$ représentée ci-contre est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M , et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB], [BC], [CG], [GH], [HE]$ et $[AE]$.



1. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE) .
b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.
2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.
3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB) .
b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.

Exercice 6

Une boîte contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.

Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.

Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.

On tire au hasard une médaille de la boîte. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;

D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;

B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;

L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;

S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
 - a. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.
 - b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\frac{21}{40}$.
 - c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?
2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.
3. On choisit au hasard une médaille dans la boîte, et on note si elle est dorée avant de la remettre dans la boîte. On reproduit l'opération dix fois. Quelle est la probabilité qu'au moins la moitié des médailles choisies soit dorées ? Justifier.

Exercice 7

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h . Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0 ; +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0 ; +\infty[$. Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

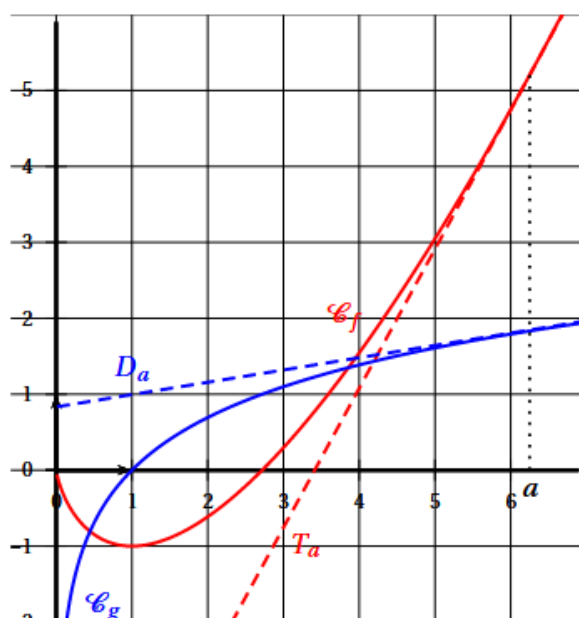
$$f(x) = x \ln(x) - x \quad ; \quad g(x) = \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse a ;
- D_a la tangente à $\mathcal{C}_g$ en son point d'abscisse a .

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\frac{1}{a}$.

2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a , que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

Exercice 8

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout entier naturel $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n) . Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$,
- pour tout $n > 0$, $u_n > 0$
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

1. On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2 .

2. Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

On a en particulier $s_1 = u_0$.

a. Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$.

b. En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}$

c. Montrer que pour tout $n > 0$, $u_n > 1$.

3. À l'aide de l'algorithme ci-dessous, on veut calculer le terme u_n pour des valeurs de u_0 et de n données.

a. Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

b. Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de l'entier n :

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

```
s = u
for i in range(n) :
    u = ...
    s = ...
print(u)
```

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) . ?

4. a. Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.

b. En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n) .