

Suites arithmétiques et géométriques

Savoirs**1^{ère} partie****Sag. 1**

Suites : Relation de récurrence et formule explicite, calcul de termes et contexte

Sag. 2

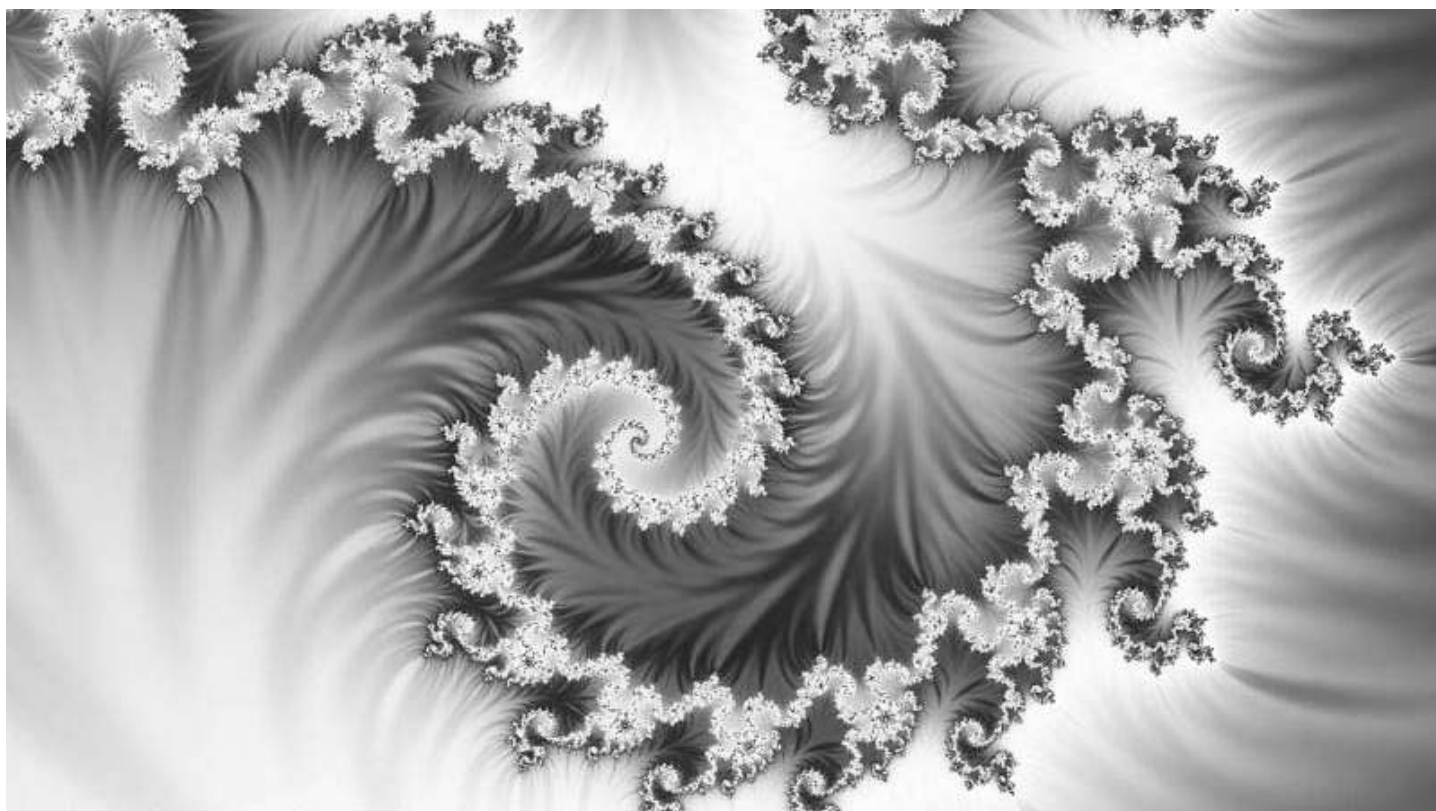
Utiliser la calculatrice ou le tableur pour calculer les termes d'une suite

Sag. 3

Suites arithmétiques et géométriques : relation de récurrence

Sag. 4

Suites arithmétiques et géométriques : formule explicite

Suites arithm^q et géom^q : Sens de variation**Sag. 5**Suites arithm^q et géom^q : Dépassement de seuil**Sag. 6**Suites arithm^q et géom^q : Limites**Sag. 7**

Suites : Algorithmes

Sag. 7**2^{ème} partie****EXERCICES en classe**

Prendre en main la notation...

Exercice A : Différencier rang et terme

1) On donne les premiers termes d'une suite u :

Rang n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Terme u_n	14	28	10	0	9	42	7	120	19	5	4

- Quelle est la valeur du terme u_5 ?
- Quel est le rang du terme égal à 120 ?
- Donner la notation mathématique du terme égal à 28
- Quel est le rang du terme égal à 5 ?
- Combien vaut u_4 ?
- Donner la notation mathématique et la valeur du terme de rang 10

Besoin d'entraînement supplémentaire ?

2) On donne les premiers termes d'une suite w :

Rang n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Terme w_n	0	1	4	6	9	15	24	38	45	94

- Quel est le rang du terme égal à 38 ?
- Combien vaut w_9 ?
- Donner la notation mathématique et la valeur du terme de rang 7
- Quelle est la valeur du terme w_1 ?
- Quel est le rang du terme égal à 6 ?
- Donner la notation mathématique du terme égal à 4

Exercice B : Sens de variation

On donne les premiers termes des suites a , b , c et d dans les tableaux suivants.

n	0	1	2	3	4	5
a_n	16	12	8	9	6	4

n	0	1	2	3	4
b_n	5,2	7,2	7,61	8,1	9,08

n	1	2	3	4	5	6
c_n	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{9}$	1

n	2	3	4	5	6
d_n	$\sqrt{52}$	5	$\frac{7}{2}$	2	$\frac{4}{3}$

Les suites a , b , c et d semblent-elles croissantes ou décroissantes sur leurs premiers termes ? Justifier.

Exercice C : Rang du 1^{er} terme

Un ordinateur génère aléatoirement une suite de 16 nombres, compris entre 0 et 5 :

2 – 4 – 3 – 3 – 9 – 5 – 0 – 5 – 1 – 1 – 1 – 2 – 0 – 3 – 0 – 4

1) On considère que ces nombres sont les premiers termes d'une suite numérique, notée v , dont la numérotation **commence au rang 0**.

a. Écrire dans le tableau ci-dessous les 10 premiers termes de la suite v

Rang n										
Terme u_n	2	4	3	3	9	5	0	5	1	1

b. Quel est le rang du 7^{ème} terme de cette suite ? Donner sa notation et sa valeur.

c. Quel est le rang du terme « 4 » ?

d. Quel est le terme de rang 4 ?

2) On considère maintenant que ce sont les premiers termes d'une suite numérique, notée w , dont la numérotation **commence au rang 2**.

a. Écrire dans le tableau ci-dessous les 10 premiers termes de la suite w

Rang n										
Terme w_n	2	4	3	3	9	5	0	5	1	1

On reprend les mêmes questions que précédemment :

b. Quel est le rang du 7^{ème} terme de cette suite ? Donner sa notation et sa valeur.

c. Quel est le rang du terme « 4 » ?

d. Quel est le terme de rang 4 ?

Exercice D : Contextualisation

1) La survie des éléphants d'Afrique est menacée par le braconnage (chasse illégale).

Pour tout entier naturel n , on note u_n l'effectif de la population d'éléphants d'Afrique pour l'année 2013 + n .

On donne l'effectif de la population d'éléphants (en millier d'individus) relevé par année dans le tableau suivant :

Année						
Rang n	0	1	2	3	4	5
Effectif u_n (en milliers)	470	442,1	413,7	384,9	355,7	326

a. À quelle année correspond le rang 0 ? À quel rang correspond l'année 2018 ?

b. En quelle année l'effectif des éléphants d'Afrique est-il passé en dessous des 400 000 ?

c. Quel est l'effectif des éléphants d'Afrique en 2017 ? Donner la notation mathématique correspondante.

d. Faire une phrase pour interpréter le terme u_1 dans le contexte.

2) On s'intéresse à l'évolution du SMIC (Salaire minimal interprofessionnel de croissance) horaire brut en euro entre 2011 et 2018. Pour tout entier naturel n , on note S_n le montant du SMIC horaire brut en euro (arrondi au centime) pour l'année 2010 + n . Le SMIC en 2011 correspond donc au terme S_1 .

Le tableau ci-dessous donne les termes de la suite S_n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
S_n	9	9,31	9,43	9,53	9,61	9,67	9,76	9,88

a. À quelle année correspond le rang 2 ?

b. À quel rang correspond l'année 2015 ?

c. Interpréter le terme S_4 dans le contexte.

d. Quel est le SMIC horaire brut en 2017 ?

Exercice E : Calcul sur les termes ou sur les rangs

On donne les premiers termes de la suite u dans le tableau suivant :

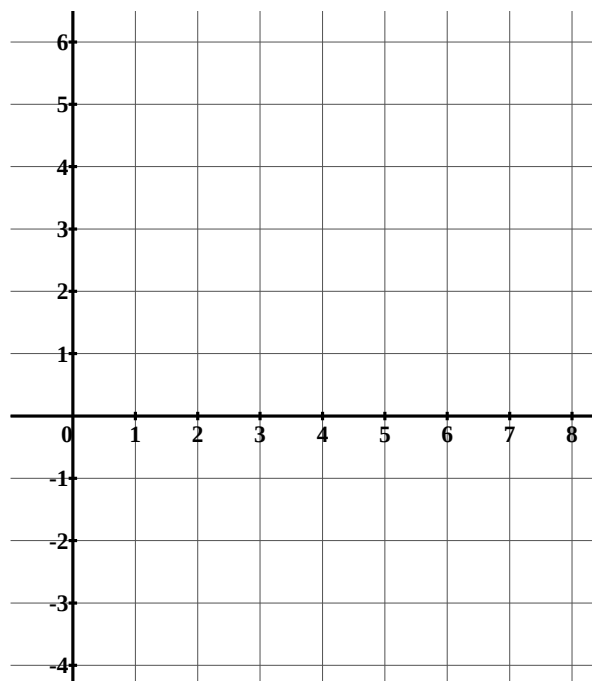
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	19	204	71	38	2	365	84	45	10	1	111	36

- 1) Calculer $u_3 + u_8$ 2) Calculer u_{3+8} 3) Calculer $u_2 \times u_5$ 4) Calculer $u_{2 \times 5}$
5) Calculer $u_4 - 1$ 6) Calculer u_{4-1} 7) Calculer u_{7+2} 8) Calculer $u_7 + 2$

Exercice F : Représentation graphique - Nuage de points

- 1) Représenter graphiquement les termes de la suite ci-dessous dans le repère donné ci-contre :

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	1	-3	0	-2	3



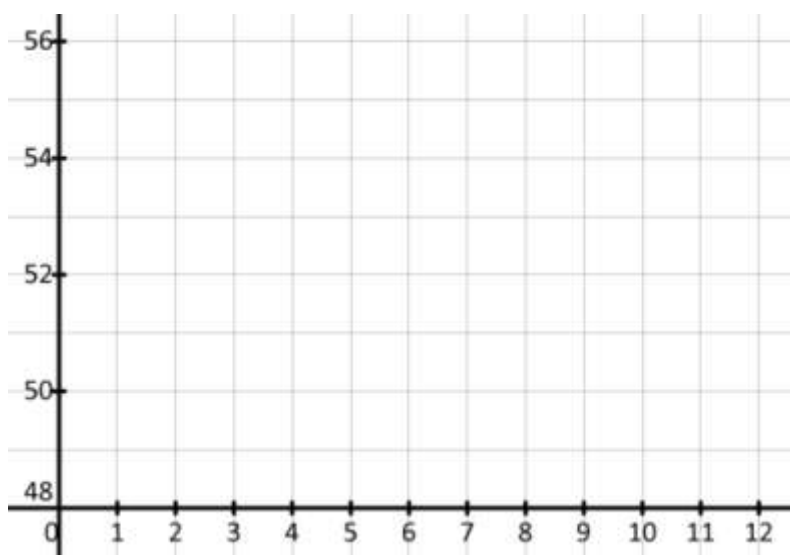
- 2) Des sondages quotidiens ont été effectués avant le second tour d'une élection opposant deux candidats A et B. Les intentions de votes, en pourcentage, pour le candidat A sont données dans le tableau ci-dessous.

Dates	24 avril	25 avril	26 avril	27 avril	30 avril	1 ^{er} mai	2 mai	3 mai	4 mai
Rang du jour n	1	2							
Pourcentage p_n	55	55	54,5	55	54	53,5	53	53	52

Par exemple, le 24 avril les intentions de votes pour le candidat A étaient de 55% et pour le candidat B de 45%.

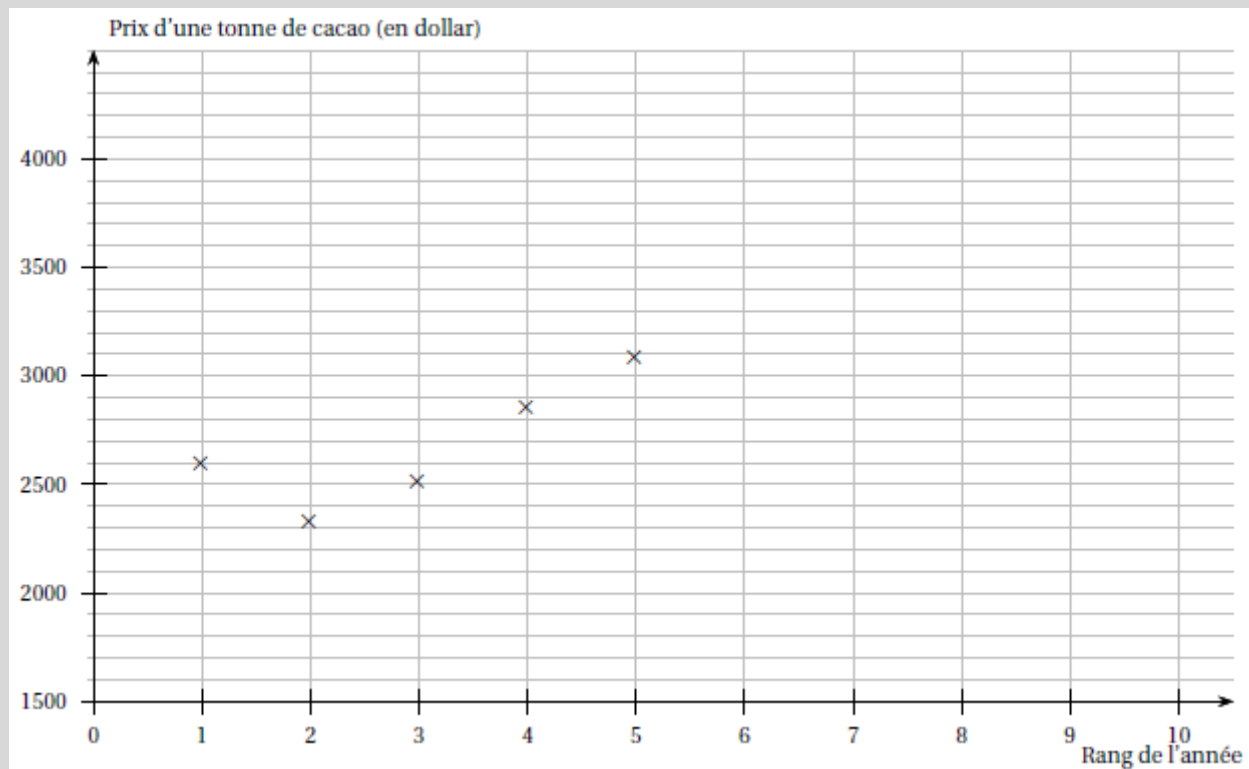
Le scrutin aura lieu le 6 mai. Comme il est interdit de publier des résultats de sondages les deux derniers jours avant le scrutin, on ne dispose pas des sondages pour le 5 et le 6 mai.

Représenter les termes donnés de la suite p_n dans le repère ci-contre.



Besoin d'entraînement supplémentaire ?

3) On a représenté ci-dessous les premiers termes d'une suite c_n donnant le prix moyen (en dollar US) de la tonne de cacao en provenance de la Côte d'Ivoire au 1^{er} janvier de l'année $2011 + n$



- À quelle année correspond le rang 1 ? À quel rang correspond l'année 2015 ?
- Déterminer graphiquement le prix d'une tonne de cacao en 2013 ?
- Déterminer la valeur de c_5 et interpréter ce nombre dans le contexte.

Exercice G : Tout ça dans un dernier contexte

Le tableau suivant représente l'évolution du chiffre d'affaires d'un artisan sur 10 années consécutives.

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Rang de l'année n	0	1				
Chiffre d'affaires C_n (en milliers d'euros)	1,10	1,30	1,54	1,80	1,91	2,10

- A quel rang correspond l'année 1996 ? A quel rang correspondrait l'année 2001 ?
- Quel est le terme de rang 3 ?
- Représenter graphiquement les premiers termes de la suite C dans un repère adapté.
- Quel semble être le sens de variation de la suite C sur ses premiers termes ?
- En 2000, le chiffre d'affaire (en milliers d'euros) est de 1,95. Quel terme ce chiffre représente-t-il ? Confirme-t-il le sens de variation apparent de la suite ou non ?

Savoir Sag. 1 : Formule explicite et relation de récurrence

Exercice 1 : Formule explicite (ou terme général)

1) On définit la suite u pour $n \geq 0$ par son terme général :
 $u_n = 2n + 1$

- a) Calculer les 3 premiers termes de la suite
- b) Calculer u_{10}

2) On définit la suite w pour $n \in \mathbb{N}$ par :
 $w_n = (-1)^n$

- a) Calculer les 4 premiers termes de la suite
- b) Calculer w_{15} et w_{100}

3) On définit la suite v pour $n \geq 2$ par la formule explicite : $v_n = \frac{3-n^2}{n-1}$

- a) Calculer les 3 premiers termes de la suite
- b) Calculer v_{21}

Besoin de plus d'entraînement ?

4) On définit la suite ε pour $n \geq 1$ par : $e_n =$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

- a) Calculer les 4 premiers termes de la suite
- b) Calculer ε_9
- c) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\varepsilon_n = \frac{n}{n+1}$$

Exercice 2 : Relation de récurrence

Dans chaque cas, calculer les termes demandés

a) On définit la suite u par son 1^{er} terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 1$

Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4

b) Soit la suite (v_n) définie par $v_2 = 3$ et, pour $n \geq 2$, par la relation $v_{n+1} = v_n^2 + \frac{1}{v_{n+1}}$

Calculer v_3 et v_4

c) On donne la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} s_{n+2} = \frac{3s_{n+1}+1}{s_{n-2}} \\ s_0 = 3 \text{ et } s_1 = 5 \end{cases}$. Calculer les termes s_2 et s_4

d) Soit la suite a définie par son 1^{er} terme $a_0 = -10$ et, pour $n \geq 1$, par la relation : $a_n = 2 - 3a_{n-1}$
 Calculer a_1 ; a_2 et a_3

Besoin de plus d'entraînement ?

Dans chaque cas, calculer les termes demandés

e) On a $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : \begin{cases} c_{n+1} = \sqrt{c_n^2 + 2} \\ c_1 = 5 \end{cases}$

Calculer C_2 et C_3

f) On définit la suite (d_n) par ses premiers termes $d_0 = 2$ et $d_1 = -2$ et la relation de récurrence :

$$d_{n+1} = 3d_n - 2d_{n-1}$$

Calculer d_2 et d_4

Exercice 3 : Donner la fonction $f(n)$ ou $g(u_n)$

1) Dans chaque cas, donner la fonction f telle que $u_n = f(n)$.

a) $u_n = \frac{3n-7}{n+3}$ b) $u_n = 3n^2 - 5n + 1$

2) Pour chacune des suites, donner la fonction g telle que $u_{n+1} = g(u_n)$.

a) $u_{n+1} = 5u_n^2 - 3u_n + 5$ b) $u_n = \frac{7}{u_{n-1}}$ c) $u_n = 2u_{n+1} - 5$ (attention)

Exercice 4 : Jouer avec les indices

1) On définit la suite u pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{n-1}{n+3}$

Exprimer en fonction de n les termes :

- a) u_{n+1} b) u_{n-1} c) $u_n + 1$ d) $u_n - 1$

2) On définit la suite w par son 1^{er} terme $w_0 = -1$ et la relation de récurrence, $u_{n+1} = 5u_n + 3$

Exprimer le plus simplement possible les termes :

- a) u_{n+2} b) u_n c) $u_n - 1$ d) u_{n-1}

Besoin de plus d'entraînement ?

1) On définit la suite v pour $n \geq 1$ par son terme général : $v_n = 2n^2 - 3$

Exprimer en fonction de n les termes v_{n+1} ; v_{n-1} ; $v_n + 1$ et $v_n - 1$

2) On définit la suite a par son 1^{er} terme $a_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence : $a_n = 3a_{n-1}^2 - 2a_{n-1}$
Exprimer le plus simplement possible les termes : a_{n+1} ; a_{n-1} et $a_n + 1$

Exercice 5 : Le 1^{er} terme qui change tout

On donne la suite u , définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = 2(u_n - 3)^2$

- a. Si le premier terme de la suite est $u_0 = 7$, calculer alors les 3 termes suivants u_1 ; u_2 et u_3
b. Si le premier terme de la suite est $u_0 = 2$, calculer alors les 3 termes suivants u_1 ; u_2 et u_3

Exercice 6 : Trouver la formule explicite

Pour chacune des suites suivantes, on donne les premiers termes.

Essayer d'abord exprimer à l'aide d'une phrase de quelle suite de nombre il s'agit, puis donner la formule explicite de la suite (la formule qui donne u_n en fonction de n)

1)

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
1	3	5	7	9

2)

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
0	1	4	9	16	25	36

3)

s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Exercice 7 : Trouver la relation de récurrence

1) Pour chacune des suites suivantes dont on donne les premiers termes, donner la relation de récurrence (la relation qui donne u_{n+1} en fonction de u_n)

a)

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
1	4	7	10	13

b)

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
100	95	90	85	80

c)

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4
1	3	9	27	81

d)

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
2	5	10	17	26

e)

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
1	1	2	3	5	8	13	21	34

f)

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
2	2	4	12	48	240

2) Dans chaque cas, exprimer u_{n+1} d'abord en fonction de n puis en fonction de u_n

a) $u_n = 4n - 1$

b) $u_n = n^2$

c) $u_{n+1} = 3n$

Exercice 8 : Le lien entre récurrence et explicite

On donne les suites (u_n) et (w_n) définies par $u_n = -2 + 5n$ et $w_n = 4 \times 3^n$

1) Écrire u_{n+1} et w_{n+1} en fonction de n

2) Montrer que (u) et (w) sont définies par les relations : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 5 \\ u_0 = -2 \end{cases}$ et $\begin{cases} w_n = 3w_{n-1} \\ w_0 = 4 \end{cases}$

3) Quelles sont les formules les plus utiles pour calculer u_1 ; w_1 ; u_2 ; w_2 ; u_9 ; w_9

Savoir Sag. 2: Calcul de termes - Calculatrice et tableur

Exercice 9 : Utilisation de la calculatrice

1) On donne la suite (u_n) définie pour tout entier n par :

$$u_n = 30 - 2 \times 0,5^n$$

À l'aide de la calculatrice, compléter le :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2) On donne la suite (s_n) définie par son 1^{er} terme $s_0 = 20$ et la relation de récurrence : $s_{n+1} = 0,8s_n + 10$.

a. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau :

n	0	1	2	3	4
s_n					

b. à partir de quel rang la suite dépasse-t-elle 45 ?

3) a. Soit a la suite définie par $a_1 = 5$ et la relation $a_n = \frac{2+a_{n-1}}{a_{n-1}}$. En affichant les termes de la suite à la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,001 près du terme a_{10}

b. Soit b la suite définie par $b_0 = 1$ et la relation $b_{n+1} = 2n - 2b_n$. Déterminer le terme b_9

c. Soit (C_n) la suite définie par $C_0 = -2$; $C_1 = 4$ et pour $n \geq 2$, $C_{n+1} = 2C_n - C_{n-1}$. Calculer C_{11}

Exercice 10 : Dans un contexte

1) Une entreprise qui connaît des difficultés économiques souhaite réaliser des prévisions de son chiffre d'affaires mensuel pour l'année 2018. On estime que le chiffre d'affaires mensuel sera de 35 millions d'euros en janvier 2018. On définit la suite (c_n) en notant c_n le chiffre d'affaires exprimé en millions d'euros pour le n -ième mois de l'année 2018; on a ainsi $c_1 = 35$.

Une étude donne une modélisation de la suite (c_n) par la formule suivante : $c_n = 42,7 \times 0,82^n$

a. Calculer la valeur de c_2 et l'interpréter dans le contexte.

b. Donner la valeur du chiffre d'affaires pour le mois de décembre 2018.

2) On étudie le nombre d'abonnement internet à très haut débit en France à partir du 1^{er} trimestre 2016. On modélise ainsi l'évolution de ce nombre d'abonnement à l'aide d'une suite (u_n) où u_n représente le nombre d'abonnement internet à très haut débit en millions au n -ième trimestre à partir de début 2016. On a alors $u_1 = 5,43$ et on modélise par la relation de récurrence $u_{n+1} = 1,06u_n$.

a. Calculer u_2 et interpréter le résultat dans le contexte.

b. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous (arrondir au centième près)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n								

c. Un journal titre un article « Plus de 8 millions d'abonnés à l'internet très haut débit au 1^{er} janvier 2018 ». Qu'en pensez-vous ?

Besoin de plus d'entraînement ?

1) Soit $v_n = 5 + 4(n - 1)$

À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau:

n	1	2	3	4	5
v_n					

2) On donne la suite (t_n) définie par son 1^{er} terme $t_1 = 4$ et la relation de récurrence :

$$t_{n+1} = 40 - 2t_n.$$

À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau :

n	1	2	3	4	5
t_n					

Plus d'entraînement ?

1) Les autorités locales décident de limiter la pêche de cabillaud.

On note u_n la quantité maximale (ou quota), en tonnes, de cabillaud pouvant être pêchée sur ces côtes l'année 2015 + n , avec n entier naturel. On a ainsi $u_0 = 600$.

Les autorités locales décident de baisser chaque année le quota de pêche de cabillaud de 30 tonnes.

On modélise alors la suite par la formule $u_n = 600 - 30n$.

Calculer u_{10} et interpréter le résultat dans le contexte étudié.

2) Afin de se constituer un capital, un épargnant place le 1^{er} janvier 2016 un montant de 1 000 € sur un compte non rémunéré et, chaque mois, verse 75 € sur ce compte.

On note C_n le montant en euros du capital accumulé au bout de n mois. Ainsi $C_0 = 1\,000$.

a. Calculer C_1 et C_3 puis interpréter les résultats dans le contexte de l'exercice.

b. On modélise la suite par C_n par la relation de récurrence $C_{n+1} = C_n + 75$.

Quel capital a-t-il accumulé au bout d'un an ?

Exercice 11 : des extrait d'un exercice de bac

Une entreprise automobile produit l'ensemble de ses véhicules électriques sur deux sites A et B. En 2015, la production annuelle a été de 95 000 véhicules, répartie de la façon suivante : 42 000 véhicules sur le site A et 53 000 véhicules sur le site B.

La direction décide de diminuer la production annuelle sur le site A au profit du site B, tout en maintenant constante la production totale.

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Par rapport à 2015, le nombre de véhicules électriques produits sur le site A en 2016 a diminué de 3 500 véhicules électriques. La direction décide de maintenir cette diminution jusqu'à une production nulle en 2027. Pour tout entier n compris entre 0 et 12 on note A_n le nombre de véhicules électriques produits sur le site A lors de l'année 2015 + n .

1. D'après les données de l'énoncé, quelle est la valeur de A_0 et de A_1 ?

2. On modélise la suite (A_n) par la formule $A_n = 42\,000 - 3500n$. Les exigences de la direction pour 2027 seront-elles respectées pour le site A ?

Partie B

Par rapport à 2015, le nombre de véhicules électriques produits sur le site B en 2016 a augmenté de 5%. La direction décide de maintenir chaque année cette augmentation de 5% par rapport à la production de l'année précédente. On modélise le nombre de véhicules électriques produits sur le site B à partir de 2015 par une suite (B_n) .

1. D'après les données de l'énoncé, quelle est la valeur de B_0 et de B_1 ?

2. On modélise la suite (B_n) par la formule $B_n = 53\,000 \times 1,05^n$. Déterminer le nombre de véhicules électriques qui seraient produits sur le site B en 2027.

Exercices à faire après le TD sur les tableurs

Exercice 12 : Utilisation du tableur

1) Dans une feuille de calcul, on a calculé les premiers termes de 4 suites :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Suite u			Suite v			Suite w			Suite s	
2	rang n	terme u_n		rang n	terme v_n		rang n	terme w_n		rang n	terme s_n
3	0	10		0	72		1	6		2	2
4	1	9		1	8		2	6,5		3	-3
5	2	6		2	24		3	6,8		4	-5
6	3	1		3	12		4	7		5	-2
7	4	-6		4	18		5	7,1428571		6	3
8	5	-15		5	14		6	7,25		7	5
9	6	-26		6	16,285714		7	7,3333333		8	2
10	7	-39		7	14,842105		8	7,4		9	-3
11	8	-54		8	15,702128		9	7,4545455		10	-5
12	9	-71		9	15,170732		10	7,5		11	-2
13	10	-90		10	15,491961		11	7,5384615		12	3
14	11	-111		11	15,295143		12	7,5714286		13	5
15	12	-134		12	15,414753		13	7,6		14	2
16	13	-159		13	15,3417		14	7,625		15	-3

On donne pour ces suites les indications suivantes :

Suite u_n : En case B4 on a entré la formule « =10-A4*A4 »

Suite v_n : En case E5 on a entré la formule « =144/E4+6 »

Suite w_n : En case H8 on a entré la formule « =5+3*G8/(G8+2) »

Suite s_n : En case K7 on a entré la formule « =K6-K5 »

⇒ Pour chacune des suites, déterminer si la suite est définie par formule explicite ou pas relation de récurrence, et donner sa définition.

2) On veut entrer dans une feuille de calcul les formules et les valeurs permettant de calculer les termes des suites :

a) Suite u définie pour $n \geq 0$, par : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 7 \\ u_0 = -3 \end{cases}$ b) Suite v_n définie pour $n \in \mathbb{N}$, par : $v_n = 5 - 9n$

c) Suite w définie pour $n \geq 1$, par : $\begin{cases} w_{n+1} = \frac{1}{1+w_n} \\ w_1 = -4 \end{cases}$ d) Suite s définie pour $n \geq 3$, par : $s_n = 3n^2 - 12$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Suite u			Suite v			Suite w			Suite s		
2	rang n	terme u_n		rang n	terme v_n		rang n	terme w_n		rang n	terme s_n	
3	0			0			0			0		
4	1			1			1			1		
5	2			2			2			2		
6	3			3			3			3		
7	4			4			4			4		
8	5			5			5			5		

⇒ En vous aidant de cette feuille de calcul vierge, déterminer les valeurs et les formules à entrer en précisant dans quelles cases vous les entrez

Exercice 13 : Dans un contexte

Une espèce d'oiseaux rares voit sa population diminuer de 3% chaque année. On recense 300 oiseaux de cette espèce en 2017. On modélise le nombre d'oiseaux de cette espèce en l'année 2017 + n par une suite (u_n) . Ainsi $u_0 = 300$.

1) Calculer la population d'oiseau de cette espèce en 2018.

2) On modélise la suite (u_n) par la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,97u_n$

On cherche à compléter la feuille de tableur ci-contre.

Quelle formule saisie dans la cellule B3 permettra d'afficher les termes successifs de la suite (u_n) en l'étirant vers le bas ?

	A	B
1	n	u(n)
2	0	300
3	1	
4	2	

3) On modélise la suite (u_n) par la formule $u_n = 300 \times 0,98^n$

On cherche à compléter la feuille de tableur ci-contre.

Quelle formule saisie dans la cellule B23 permettra d'afficher les termes successifs de la suite (u_n) en l'étirant vers le bas ?

	A	B
1	n	u(n)
22	20	163
23	21	
24	22	
25	23	

Savoir Sag. 3: Arithmétiques et géométriques - Récurrence

Exercice 14 : Relation de récurrence

1) Donner dans chaque cas la relation de récurrence qui lie **le terme de rang n au terme de rang $n + 1$**

- a. La suite (u_n) est arithmétique de raison 5
- b. La suite (W_n) est géométrique de raison 7
- c. La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$
- d. La suite (y_n) est arithmétique de raison -12

2) Donner dans chaque cas la relation de récurrence qui lie **le terme de rang $n - 1$ au terme de rang n**

- a. La suite (a_n) est géométrique de raison -3
- b. La suite (b_n) est arithmétique de raison 27
- c. La suite (C_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$
- d. La suite (δ_n) est géométrique de raison 1,04

3) Attention aux formulation des consignes

- a. La suite (g_n) est géométrique de raison 4. Exprimer g_{n+1} en fonction de g_n
- b. La suite (H_n) est arithmétique de raison -4 . Exprimer H_{n+1} en fonction de H_n
- c. La suite (R_n) est une suite arithmétique de raison 36. Exprimer R_n en fonction de R_{n-1}
- d. La suite (s_n) est une suite géométrique de raison 7,6. Exprimer s_n en fonction de s_{n-1}

Besoin de plus d'entraînement ?

- 1) Donner la relation de récurrence qui lie le terme de rang n au terme de rang $n + 1$
 - a. La suite (u_n) est arithmétique de raison -230
 - b. La suite (w_n) est géométrique de raison 1,015
- 2) Donner la relation de récurrence qui lie le terme de rang $n - 1$ au terme de rang n
 - a. La suite (D_n) est géométrique de raison -15
 - b. La suite (c_n) est arithmétique de raison 4
- 3) a. La suite t est arithmétique de raison -110 .
Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n
 - b. La suite (S_n) est géométrique de raison $\frac{2}{7}$
Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n

Exercice 15 : Calculs de termes

a. La suite (a_n) est arithmétique de raison 16 et de premier terme $a_0 = 2$. Calculer a_1 , a_2 et a_4 .

b. La suite (b_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ et de premier terme $b_1 = 2\,500$. Calculer b_2 , b_3 et b_4 .

c. La suite (C_n) est géométrique de raison -3 et de premier terme $C_0 = 6$. Calculer C_1 , C_2 et C_4 .

d. La suite (Δ_n) est arithmétique de raison -6 et de premier terme $\Delta_1 = 10$. Calculer Δ_2 , Δ_3 et Δ_4 .

Besoin de plus d'entraînement ?

a. La suite (u_n) est arithmétique de raison -5 et de premier terme $u_0 = \frac{8}{3}$. Calculer u_1 et u_3

b. La suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $w_0 = 7$. Calculer w_1 et w_3

Exercice 16 : Contextes (1)

1) D'après l'INSEE, l'espérance de vie à la naissance est passée pour les hommes de 59,9 ans en 1946 à 78,5 ans en 2012. On se propose ici de modéliser l'évolution de l'espérance de vie pour les hommes par la suite arithmétique (U_n) de premier terme $U_0 = 59,9$ et de raison $r = 0,25$.

a. Calculer U_1 et U_2 qui correspondent aux années 1947 et 1948.

b. Donner U_{n+1} en fonction de U_n

c. Quelle espérance de vie à la naissance les hommes avaient-ils en 1952 ?

2) Le salaire mensuel de Justine est de 1 600 € en 2014. Son contrat d'embauche stipule que son salaire mensuel augmente chaque année. On note S_0 le salaire mensuel (en euro) de Justine en 2014 et on note S_n son salaire mensuel (en euro) pour l'année $2014 + n$. D'après le contrat d'embauche, la suite (S_n) est une suite géométrique de raison 1,1.

a. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n

b. Calculer S_1 et S_2 et interpréter dans le contexte.

c. Quel sera le salaire de Justine, arrondi à l'euro près, en 2020 ?

3) On modélise l'évolution du prix du m^2 d'un appartement neuf en France métropolitaine : on part d'un prix de 4 200 € en 2014 et on applique une augmentation annuelle de 5,2 % à partir de cette date.

On définit la suite (u_n) où u_n représente la valeur estimée, selon ce modèle, du prix du m^2 d'un appartement neuf l'année $(2014 + n)$. Ainsi $u_0 = 4\,200$ correspond au prix du m^2 d'un appartement neuf en 2014.

a. Quel sera le prix au m^2 d'un appartement neuf en 2015 ?

b. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser le premier terme et la raison.

c. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

d. Calculer u_5 et interpréter le résultat dans le contexte.

4) André a décidé de placer 1 000 € sur un compte en banque le 1^{er} janvier 2018, et d'y verser 200 € tous les 1^{er} du mois. On note C_n le capital acquis sur le compte n mois après le 1^{er} janvier 2018.

a. Déterminer C_0 et C_1

b. Justifier que la suite (C_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.

c. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n .

d. Déterminer le capital acquis sur le compte au 1^{er} mai 2018.

Exercice 16 : Besoin de plus d'entraînements ?

5) Une entreprise souhaite, par diverses incitations, diminuer de 5 % par an le pourcentage de ceux qui viennent travailler en voiture. On note V_0 le pourcentage de ces employés en 2016 et pour tout entier n , V_n le pourcentage espéré l'année $(2016 + n)$. On a $V_0 = 81,6$

- Calculer V_1 , puis V_2 , et interpréter dans le contexte
- Déterminer la nature de cette suite puis exprimer V_{n+1} en fonction de V_n .

6) Entre le taux de croissance naturel et le braconnage, on estime que la population d'éléphants d'Afrique diminue de 28 000 individus par an. Pour tout entier naturel n , on note E_n l'effectif de cette population pour l'année $2013 + n$. La population totale d'éléphants d'Afrique était estimée à 470 000 individus en 2013.

- Calculer le nombre d'éléphants d'Afrique en 2014.
- Donner la nature de la suite (E_n) et en préciser le premier terme et la raison.
- Exprimer E_n en fonction de E_{n-1} .

Exercice 17 : Identifier

Parmi les suites suivantes, lesquelles sont des suites arithmétiques ou géométriques ?

Donner alors leur nature et leur raison

$$\begin{array}{llllll} u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} & v_{n+1} = -3v_n & d_{n+1} = d_n & y_{n+1} = 2 + y_n & w_{n+1} = 3w_n - 1 \\ a_{n+1} = 2a_n & z_{n+1} = 2n + z_n & c_{n+1} = \frac{c_n}{4} & e_{n+1} = -e_n & t_n = \frac{2t_{n-1}}{5} \\ p_{n+1} = 5 - p_n & g_{n+1} = \frac{2}{g_n} & r_{n+1} = r_n - 3r_n & x_{n+1} = (-2)^n + x_n & j_n = j_{n-1} - 4 \end{array}$$

Exercice 18 : Contextes (2)

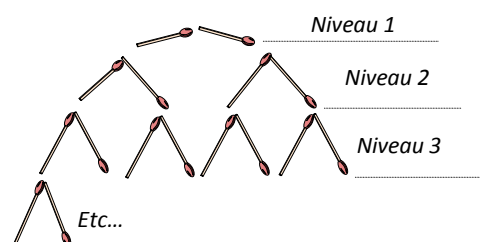
1) On réalise avec des allumettes la construction ci-contre :

On souhaite la prolonger jusqu'au niveau 10

a) De combien d'allumettes sont formés les 4^{ème} et 5^{ème} niveaux ?

b) On définit une suite en notant u_n le nombre d'allumettes du $n^{\text{ième}}$ niveau.

Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est géométrique, et donner sa raison et son premier terme.



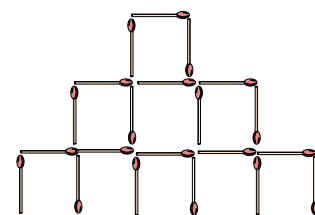
2) On réalise avec des allumettes la figure ci-contre :

La 1^{ère} rangée est constituée de 3 allumettes, la 2^{ème} rangée de 7 allumettes, la 3^{ème} rangée de 11 allumettes...

a) De combien d'allumettes sont formées les 4^{ème} et 5^{ème} rangée ?

b) On définit une suite en notant w_n le nombre d'allumettes de la $n^{\text{ième}}$ rangée.

Démontrer que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est arithmétique, et donner sa raison et son premier terme.



Savoir Sag. 4 : Arithmétiques et géométriques - Explicite

Exercice 19 : Déterminer la formule explicite

1) Donner dans chaque la formule explicite de la suite

a. La suite (u_n) est arithmétique de raison 24 et de premier terme $u_0 = -15$

b. La suite (W_n) est géométrique de raison 6 et de premier terme $W_1 = 4$

c. La suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{3}{2}$ et de premier terme $v_0 = 5$

d. La suite (y_n) est arithmétique de raison -11 et de premier terme $y_2 = 152$

2) a. La suite (g_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $g_0 = -9$. Exprimer g_n en fonction de n

b. La suite (H_n) est arithmétique de raison -3 et de premier terme $H_1 = 0$. Exprimer H_n en fonction de n

c. La suite (R_n) est arithmétique de raison 1,3 et de premier terme $R_0 = 0,7$ Exprimer R_n en fonction de n

d. La suite (s_n) est géométrique de raison 1,06 et de premier terme $s_2 = -10$ Exprimer s_n en fonction de n

Besoin de plus d'entraînement ?

1) Donner la formule explicite de la suite

a. La suite (u_n) est arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_1 = 7$

b. La suite (w_n) est géométrique de raison -1 et de premier terme $w_0 = 42$

c. La suite (D_n) est géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme $D_1 = 12$

d. La suite (c_n) est arithmétique de raison $\frac{4}{3}$ et de premier terme $c_0 = \frac{1}{2}$

2) a. La suite t est arithmétique de raison -10 et de premier terme $t_2 = 30$.

Exprimer t_n en fonction de n

b. La suite (S_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $S_0 = 8$
Exprimer S_n en fonction de n

Exercice 20 : Calculs de termes

a. La suite (a_n) est arithmétique de raison -18 et de premier terme $a_0 = 203$. Calculer a_{24}

b. La suite (b_n) est géométrique de raison 1,5 et de premier terme $b_1 = 6$. Calculer b_9 (arrondi à 10^{-2})

c. La suite (C_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $C_0 = 120$. Calculer C_{11} (valeur exacte)

d. La suite (Δ_n) est arithmétique de raison $\frac{7}{3}$ et de premier terme $\Delta_2 = -2$. Calculer Δ_{20} .

Besoin de plus d'entraînement ?

a. La suite (u_n) est arithmétique de raison 12 et de premier terme $u_1 = -50$. Calculer u_{24}

b. La suite (w_n) est géométrique de raison -2 et de premier terme $w_0 = \frac{1}{64}$. Calculer w_8

Exercice 21 : Contextes (1)

1) Le conseil municipal d'un village a pris la décision d'offrir 3 ordinateurs par an au club informatique. Le club possède actuellement 15 ordinateurs.

a) Combien en aura-t-il dans un an ? dans deux ans ?

b) On note v_n le nombre d'ordinateur que possèdera le club dans n années. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le terme initial.

c) Au bout de combien de temps le club informatique aura-t-il un équipement d'au moins 50 ordinateurs ?

Exercice 21 : (suite)

2) Une population de bactérie double toutes les heures. On observe un échantillon contenant initialement 10 millions de bactéries. On note b_n le nombre de bactéries présentes dans l'échantillon au bout de n heures.

- a) Exprimer b_n en fonction de n . Quelle est la nature de la suite ?
- b) Combien y aura-t-il de bactéries au bout d'une journée ?

3) La forêt amazonienne diminue de 30 000 km² par an depuis 20 ans.

Sa superficie était estimée à 3 506 000 de km² en 2001. Quelle est sa superficie estimée aujourd'hui ?

Exercice 22 : Identifier

Parmi les suites suivantes, lesquelles sont des suites arithmétiques ou des suites géométriques ? Donner alors leur raison et leur premier terme.

$$x_n = (-2)^n$$

$$v_n = -3n + 1$$

$$w_n = 2n^2 + 7$$

$$y_n = 7 - n$$

$$e_n = 3 \times 2^{n+1}$$

$$b_n = (-2) \times 5^{n-1}$$

$$w_n = 7^n \times 2^n$$

$$c_n = 4n$$

$$s_n = \frac{3^n}{5}$$

$$g_n = \frac{5}{n} - 4$$

$$d_n = \frac{1}{3^n}$$

$$q_n = 3 + 5(n - 1)$$

$$r_n = (-4)^n + 3$$

$$t_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}$$

$$h_n = 3 \times (-1)^n$$

Exercice 23 : Contextes (2)

1) En période de sécheresse, une mare perd chaque semaine un quinzième de son contenu par évaporation. En début de période, elle contient $V_0 = 30 \text{ m}^3$ d'eau.

On note $V_1, V_2, \dots, V_n$ les volumes d'eau de la mare au bout, respectivement, d'une semaine de sécheresse, de deux semaines, ... de n semaines de sécheresse.

- a) Calculer V_1 et V_2
- b) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n . Quelle est la nature de la suite (V_n) ?
- c) Exprimer V_n en fonction de n
- d) Quel sera le volume d'eau dans la mare à la fin de la cinquième semaine ?
- e) Au bout de combien de semaines de sécheresse la mare aurait-elle diminué de moitié ?

2) Lors de la catastrophe de Fukushima en 2011, de grandes quantités d'iode 131 et de césium 137, substances radioactives nocives, ont été remâchées dans l'atmosphère.

La durée au bout de laquelle la substance relâchée a diminué de moitié (par désintégration) est appelée « demi-vie ». La demi-vie de l'iode 131 est de 8 jours, mais celle du césium 137 est de 30 ans.

On note u_0 la quantité d'iode 131 émise lors de la catastrophe, u_1 la quantité restante au bout d'une durée égale à une demi-vie (soit au bout de 8 jours), u_2 la quantité restante au bout d'une durée égale à deux demi-vies (soit au bout de 16 jours)... u_n la quantité restante au bout d'une durée égale à n demi-vies

- a) Déterminer la relation de récurrence donnant u_n en fonction de u_{n-1} .
- b) Quelle est la nature de la suite ? Préciser la raison.
- c) Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n , puis en déduire l'expression de $\frac{u_n}{u_0}$ en fonction de n
- d) Déterminer la durée au bout de laquelle la quantité restante d'iode 131 devient inférieure à 1% de la quantité émise lors de la catastrophe.
- e) En vous inspirant des questions précédentes, déterminer la durée au bout de laquelle la quantité restante de césium 137 devient inférieure à 1% de la quantité émise lors de la catastrophe.

Exercice 23 (Suite)

3) Une horloge à balancier retarde d'une minute et 10 secondes par heure. Il est 15 h 16 au moment où on la remonte.

- a)** Modéliser cette situation à l'aide d'une suite dont vous donnerez la nature, le 1^{er} terme et l'expression du terme général (en précisant la signification de la variable n)
- b)** Quelle heure sera-t-il au bout de 3 jours ? Détailler la méthode.

4) Un sultan tombe malade. Les médecins de sa cour s'évertuent à le guérir – mais sans succès. Apparaît alors un étranger qui, grâce à ses potions magiques, parvient à guérir le sultan.

Le sultan, qui n'est certes pas ingrat, demande alors à l'étranger comment il peut le remercier.

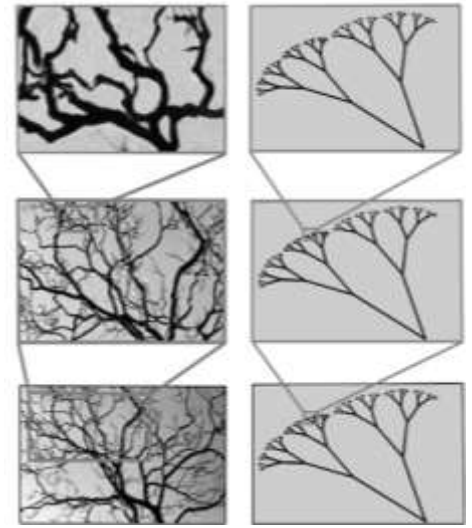
"Apporte-moi un échiquier", s'exclame l'étranger. "Puis place un grain de riz sur la première case, deux grains sur la seconde case, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième, puis continue de doubler les grains de riz sur chaque case jusqu'à ce que l'échiquier (8×8 cases, donc 64 cases) soit rempli".

On aura maintenant compris que le sultan va se faire avoir – mais dans quelle mesure ?

- a)** Modéliser la situation à l'aide d'une suite définie par récurrence, dont on précisera la relation, le premier terme, ce que représente le rang et ce que représentent les termes.
- b)** Déterminer, en détaillant la démarche, combien y a-t-il de grains de riz sur la 16^{ème} case de l'échiquier.
- c)** Sachant que mille grains de riz pèsent 28 g, combien faut-il remplir de cases pour avoir déjà 1 kg de riz ?

CORRECTIONS

CORRECTION - Prendre en main la notation...



Corrigé Exercice A

- 1) a. $u_5 = 45$ b. 120 est le terme de **rang 7** ($u_7 = 120$) c. $28 = u_1$
 d. 5 est le terme de **rang 9** ($u_9 = 5$) e. $u_4 = 9$ f. $u_{10} = 4$

- 2) a. $38 = w_8$ (attention au nom de la suite : « w » et non « u ») b. $w_9 = 45$
 c. w_7 d. $w_1 = 0$ e. Le terme 6 a pour **rang 4** (on a $w_4 = 6$) f. $4 = w_3$

Corrigé Exercice B

Suite **a** : **ni l'un, ni l'autre** car $a_2 < a_3$ mais $a_3 > a_4$

Suite **b** : **Croissante**, car pour $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ on a $b_n < b_{n+1}$

Suite **c** : **ni l'un, ni l'autre** car $c_3 < c_4$ mais $c_4 > c_5$

Suite **d** : **Décroissante**, car pour $n \in \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ on a $d_n > d_{n+1}$

Corrigé Exercice C

1) a.

Rang n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Terme u_n	2	4	3	3	9	5	0	5	1	1

b. le 7^{ème} terme de cette suite est le terme **$u_6 = 0$**

c. Le rang du terme « 4 » est **1** car $u_1 = 4$

d. Le terme de rang 4 est le terme **$u_4 = 9$**

2) a.

Rang n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Terme w_n	2	4	3	3	9	5	0	5	1	1

b. le 7^{ème} terme de cette suite est le terme **$w_8 = 0$**

c. Le rang du terme « 4 » est **3** car $w_3 = 4$

d. Le terme de rang 4 est le terme **$w_4 = 3$**

Corrigé Exercice D

1)

Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Rang n	0	1	2	3	4	5
Effectif u_n (en milliers)	470	442,1	413,7	384,9	355,7	326

- a. Le rang 0 correspond à l'année **2013**. L'année 2018 correspond au **rang 5**.
b. L'effectif des éléphants passe en dessous des 400 000 en l'année **2016**
c. L'effectif des éléphants d'Afrique en 2017 est **355,7 milliers**. On note $u_4 = 355,7$
d. $u_1 = 442,1$. **C'est l'effectif, en milliers, des éléphants d'Afrique en 2014.**

2)

Année	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
n	1	2	3	4	5	6	7	8
S_n	9	9,31	9,43	9,53	9,61	9,67	9,76	9,88

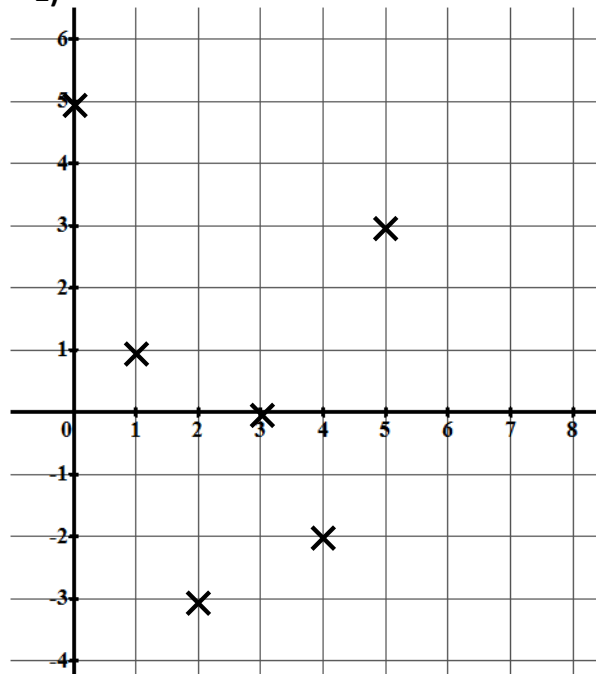
- a. Le rang 2 correspond à l'année **2012**.
b. L'année 2015 correspond au **rang 5**.
c. $S_4 = 9,53$ Il s'agit du **SMIC horaire brut, en euros, pour l'année 2014**
d. Le SMIC horaire brut en 2017 est de **9,76 €** (on a $S_7 = 9,76$)

Corrigé Exercice E

- 1) $u_3 + u_8 = 38 + 10 = 48$ 2) $u_{3+8} = u_{11} = 36$ 3) $u_2 \times u_5 = 71 \times 365 = 25915$
4) $u_{2 \times 5} = u_{10} = 111$
5) $u_4 - 1 = 2 - 1 = 1$ 6) $u_{4-1} = u_3 = 38$ 7) $u_{7+2} = u_9 = 1$ 8) $u_7 + 2 = 45 + 2 = 47$

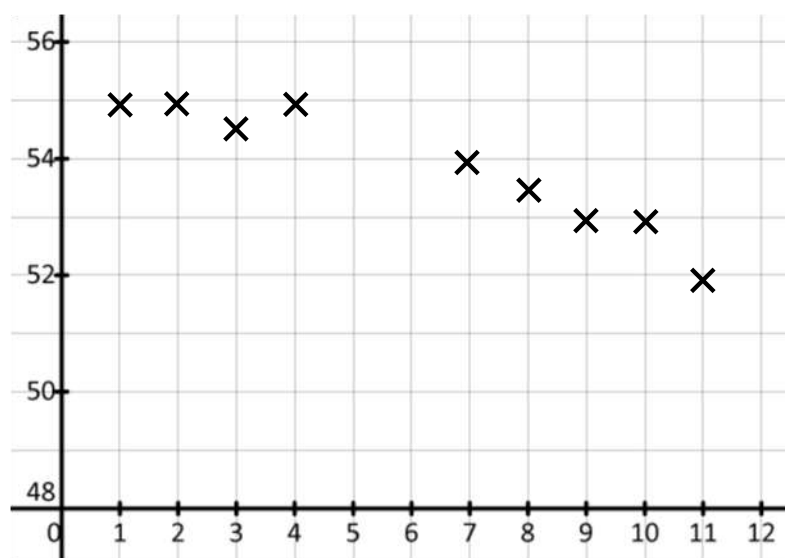
Corrigé Exercice F

1)



2)

Dates	24 avril	25 avril	26 avril	27 avril	30 avril	1 ^{er} mai	2 mai	3 mai	4 mai
n	1	2	3	4	7	8	9	10	11
p_n	55	55	54,5	55	54	53,5	53	53	52



- 3) a. Le rang 1 correspond à l'année **2012**. L'année 2015 correspond au **rang 4**
 b. Une tonne de cacao en 2013 coûte environ **2 320 dollars** (on a $c_2 \approx 2\,320$)
 c. $c_5 \approx 3\,100 \Rightarrow$ Une tonne de cacao coûte environ **3 100 dollars en 2016**

Corrigé Exercice G

Année	1992	1993	1994	1995	1996	1997
Rang de l'année n	0	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires C_n (en milliers d'euros)	1,10	1,30	1,54	1,80	1,91	2,10

a. L'année 1996 correspond au **rang 4**.

L'année 2001 correspond au **rang 9**.

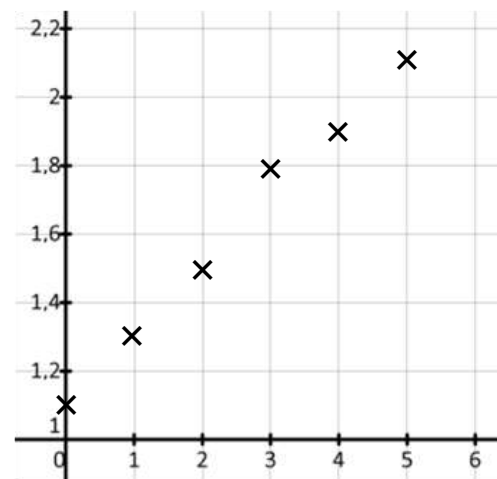
b. Le terme de rang 3 est $C_3 = 1,80$

c. $\Rightarrow$

d. La suite C semble être **croissante**

e. Cela représente le **terme C_8**

Cela **ne confirme pas** le fait que la suite semblait croissante, puisque $C_8 = 1,95 < C_5$



Corrections Savoir Sag. 1

Corrigé Exercice 1

1) a) $u_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$; $u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$
 et $u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$

b) $u_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$

2) a) $w_0 = (-1)^0 = 1$; $w_1 = (-1)^1 = -1$
 $w_2 = (-1)^2 = 1$ et $w_3 = (-1)^3 = -1$

b) de façon générale, les puissances paires de -1 donne 1
 et les puissances impaires, $-1 \Rightarrow$ Donc $w_{15} = -1$ et $w_{100} = 1$

3) a) $v_2 = \frac{3-2^2}{2-1} = -1$; $v_3 = \frac{3-3^2}{3-1} = \frac{-6}{2} = -3$ et $v_4 = \frac{3-4^2}{4-1} = \frac{-13}{3}$ b) $v_{21} = \frac{3-21^2}{21-1} = \frac{-438}{20} = -\frac{219}{10}$

4) a) $\varepsilon_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$; $\varepsilon_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$
 $\varepsilon_3 = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$; $\varepsilon_4 = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$
 b) $\varepsilon_9 = \frac{1}{1+\frac{1}{9}} = \frac{1}{\frac{10}{9}} = \frac{9}{10}$
 c) $\varepsilon_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}$ **CQFD**

Corrigé Exercice 2

a) $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$
 $u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$
 $u_3 = 2 \times 15 + 1 = 31$ et $u_4 = 2 \times 31 + 1 = 63$

b) $v_3 = v_2^2 + \frac{1}{v_2+1} = 3^2 + \frac{1}{3+1} = 9 + \frac{1}{4} = \frac{37}{4}$
 et $v_4 = \left(\frac{37}{4}\right)^2 + \frac{1}{\frac{37}{4}+1} = \frac{1369}{16} + \frac{1}{\frac{41}{4}} = \frac{1369}{16} + \frac{4}{41} = \frac{56193}{656}$

c) $s_2 = \frac{3s_1+1}{s_0-2} = \frac{3 \times 5+1}{3-2} = 16$ et $s_3 = \frac{3s_2+1}{s_1-2} = \frac{3 \times 16+1}{5-2} = \frac{49}{3}$ donc $s_4 = \frac{3 \times \frac{49}{3}+1}{16-2} = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}$

d) $a_1 = 2 - 3a_0 = 2 - 3 \times (-10) = 32$; $a_2 = 2 - 3 \times 32 = -94$ et $a_3 = 2 - 3 \times (-94) = 284$

e) $C_2 = \sqrt{c_1^2 + 2} = \sqrt{5^2 + 2} = \sqrt{27}$
 et $C_3 = \sqrt{(\sqrt{27})^2 + 2} = \sqrt{27+2} = \sqrt{29}$

f) $d_2 = 3d_1 - 2d_0 = 3 \times (-2) - 2 \times 2 = -10$
 $d_3 = 3d_2 - 2d_1 = 3 \times (-10) - 2 \times (-2) = -26$

donc $d_4 = 3 \times (-26) - 2 \times (-10) = -58$

Corrigé Exercice 3

1) a) $f(x) = \frac{3x-7}{x+3}$ b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

2) a) $g(x) = 5x^2 - 3x + 5$ b) $g(x) = \frac{7}{x}$

c) Attention, il faut avoir u_{n+1} en fonction de u_n et non l'inverse

donc $u_n = 2u_{n+1} - 5 \Leftrightarrow u_n + 5 = 2u_{n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{u_n+5}{2}$ et $g(x) = \frac{x+5}{2}$

Corrigé Exercice 4

1) a) $u_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)+3} = \frac{n}{n+4}$

b) $u_{n-1} = \frac{(n-1)-1}{(n-1)+3} = \frac{n-2}{n+2}$

c) $u_n + 1 = \frac{n-1}{n+3} + 1 = \frac{n-1+n+3}{n+3} = \frac{2n+2}{n+3}$

d) $u_n - 1 = \frac{n-1}{n+3} - 1 = \frac{n-1-(n+3)}{n+3} = \frac{-4}{n+3}$

2) a) $u_{n+2} = 5u_{n+1} + 3$ b) $u_n = 5u_{n-1} + 3$

c) $u_n - 1 = 5u_{n-1} + 3 - 1 = 5u_{n-1} + 2$

d) $u_{n-1} = 5u_{n-2} + 3$

1) $v_{n+1} = 2(n+1)^2 - 3 = 2(n^2 + 2n + 1) - 3 = 2n^2 + 4n - 1$

$v_{n-1} = 2(n-1)^2 - 3 = 2(n^2 - 2n + 1) - 3 = 2n^2 - 4n - 1$

$v_n + 1 = 2n^2 - 3 + 1 = 2n^2 - 2$

et $v_n - 1 = 2n^2 - 3 - 1 = 2n^2 - 4$

2) $a_{n+1} = 3a_n^2 - 2a_n$

$a_{n-1} = 3a_{n-2}^2 - 2a_{n-2}$

et $a_n + 1 = 3a_{n-1}^2 - 2a_{n-1} + 1$

Corrigé Exercice 5

a. $u_1 = 2(u_0 - 3)^2 = 2 \times (7 - 3)^2 = 2 \times 4^2 = 32$

$u_2 = 2 \times (32 - 3)^2 = 2 \times 29^2 = 1\,982$

$u_3 = 2 \times (1982 - 3)^2 = 2 \times 1979^2 = 7\,832\,882$

b. $u_1 = 2(u_0 - 3)^2 = 2 \times (2 - 3)^2 = 2 \times (-1)^2 = 2$

$u_2 = 2 \times (2 - 3)^2 = 2 \times (-1)^2 = 2$

$u_3 = 2 \times (2 - 3)^2 = 2 \times (-1)^2 = 2$

... Ce qui s'appelle une suite stationnaire ! Comme quoi, il est prouvé l'importance du 1^{er} terme !!!

Corrigé Exercice 6

1) Suite des nombres impairs $\Rightarrow v_n = 2n + 1$ 2) Suite des carrés parfaits $\Rightarrow w_n = n^2$

3) Suite des inverses des nombres entiers non nuls $\Rightarrow s_n = \frac{1}{n}$

Corrigé Exercice 7

1) a) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 5 \\ u_1 = 100 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \\ u_1 = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \\ u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_{n+1} = (n+1)u_n \\ u_0 = 2 \end{cases}$

2) a) $u_{n+1} = 4(n+1) - 1 = 4n + 4 - 1 = (4n - 1) + 4 = u_n + 4$

b) $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = u_n + 2n + 1$

c) $u_{n+1} = 3^n$ et donc $u_n = 3^{n-1} \Rightarrow u_{n+1} = 3^n = 3 \times 3^{n-1} = 3u_n$

Corrigé Exercice 8

1) $u_{n+1} = -2 + 5(n+1) = -2 + 5n + 5 = 5n + 3$ et $w_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} = 4 \times 3 \times 3^n = 12 \times 3^n$

2) Plusieurs méthodes au choix :

1^{ère} méthode : $u_{n+1} - u_n = (5n + 3) - (-2 + 5n) = 3 + 2 = 5 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + 5$ CQFD

2^{ème} méthode : $u_{n+1} = -2 + 5(n+1) = (-2 + 5n) + 5 = u_n + 5$ CQFD

3^{ème} méthode : $u_n + 5 = (-2 + 5n) + 5 = -2 + (5n + 5) = -2 + 5(n+1) = u_{n+1}$ CQFD

Par ex, méthode 3... $3 \times w_n = 3 \times (4 \times 3^n) = 4 \times (3 \times 3^n) = 4 \times 3^{n+1} = w_{n+1} \Rightarrow$ CQFD again

3) Pour u_1 ; w_2 ; u_1 et w_2 la relation de récurrence est la plus simple... Pour u_9 et w_9 ce sont les formules explicites (à moins que vous vouliez vous amuser à calculer les 7 termes précédents...)

$u_1 = -2 + 5 = 3$; $u_2 = 3 + 5 = 8$ et $u_9 = -2 + 5 \times 9 = 43$

$w_1 = 4 \times 3 = 12$; $w_2 = 3 \times 12 = 36$ et $w_9 = 4 \times 3^9 = 78\,732$

Corrections Savoir Sag. 2

Corrigé Exercice 9

1)

n	0	1	2	3	4
u_n	28	29	29,5	29,75	29,88

2) a.

n	0	1	2	3	4
s_n	20	26	30,8	34,64	37,712

1)

n	1	2	3	4	5
v_n	5	9	13	17	21

2)

n	1	2	3	4	5
t_n	4	32	-24	88	-136

b. On a $u_8 \approx 44,97$ et $u_9 \approx 45,97$ donc la suite dépasse 45 à partir du rang 9

3) a. $a_{10} \approx 1,997$

b. $b_9 = -620$

c. $C_{11} = 64$

Corrigé Exercice 10

- 1) a. $c_2 = 42,7 \times 0,82^2 \simeq 28,71$ Le chiffre d'affaire en février 2018 serait de 28,71 millions d'euros
b. $c_{12} = 42,7 \times 0,82^{12} \simeq 3,95$ Le chiffre d'affaires pour décembre 2018 serait de 3,95 millions d'euros

2) a. $u_2 = 1,06 \times u_1 = 1,06 \times 5,43 = 5,7558$

Au 2^{ème} trimestre de 2016, il y aura environ 5,76 millions d'abonnés à l'internet très haut débit

b.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	5,43	5,76	6,10	6,47	6,86	7,27	7,70	8,17

c. Le 1^{er} janvier 2018 correspond à la fin du 4^{ème} trimestre 2017, c'est-à-dire au rang $n = 8$.

Or on a $u_8 \simeq 8,17$: le journal a raison, les 8 millions d'abonnés sont dépassés.

1) $u_{10} = 600 - 30 \times 10 = 300$ Le quota de pêche serait de 300 tonnes en 2025

2) a. $C_1 = 1000 + 75 = 1\,075$; $C_2 = 1\,075 + 75 = 1\,150$ et $C_3 = 1\,150 + 75 = 1\,225$

Il y aura 1 075 € le 1^{er} février sur le compte, et 1 225 € le 1^{er} avril

b. Au bout d'un an correspond le rang $n = 12$ donc on calcule à la calculatrice les termes successifs, et on trouve $C_{12} = 1\,900$. Il y aura 1 900 € sur le compte au bout d'un an.

Corrigé Exercice 11

Partie A

1. $A_0 = 42\,000$ et $A_1 = 42\,000 - 3\,500 = 38\,500$

2. L'année 2027 correspond au rang 12, donc $A_{12} = 42\,000 - 3\,500 \times 12 = 0$

Il n'y aura plus de production sur le site A, les exigences de la direction pour 2027 seront respectées.

Partie B

1. $B_0 = 53\,000$ et $B_1 = 53\,000 \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 53\,000 \times 1,05 = 55\,650$

2. $B_{12} = 53\,000 \times 1,05^{12} \simeq 95\,180$ Il y aura 95 180 véhicules électriques produits sur le site B en 2027.

Corrigé Exercice 12

1) Suite u_n (par rapport à la case d'à côté, donc par rapport au rang) $\Rightarrow$ Formule explicite : $u_n = 10 - n^2$

Suite v_n (par rapport à la case d'avant, donc par rapport au terme précédent)

$$\Rightarrow \text{Relation de récurrence : } \begin{cases} v_{n+1} = \frac{144}{v_n} + 6 \\ v_0 = 72 \end{cases}$$

Suite w_n : Formule explicite ; $w_n = 5 + \frac{n}{n+2}$ pour $n \geq 1$

Suite s_n (par rapport aux DEUX cases d'avant, donc par rapport aux DEUX termes précédents)

$$\text{Relation de récurrence : } \begin{cases} s_{n+2} = s_{n+1} - s_n \\ s_2 = 2 \text{ et } s_3 = -3 \end{cases}$$

- 2) a) Suite $u_n \Rightarrow$ Récurrence : on doit entrer u_0 dans la 1^{ère} case et la formule dans la 2^{ème}
 $\Rightarrow$ Dans **C3**, on entre « **-3** » et dans **C4**, on entre « **=2*C3+7** »
- b) Suite $v_n \Rightarrow$ Explicite : on entre directement la formule dans la 1^{ère} case
 $\Rightarrow$ Dans **F3**, on entre « **= 5-9*E3** »
- c) Suite $w \Rightarrow$ Récurrence, mais définie à partir de $n = 1$
 $\Rightarrow$ on doit entrer w_1 dans la 2^{ème} case et la formule dans la 3^{ème}
 $\Rightarrow$ Dans **I4**, on entre « **-4** » et dans **I5**, on entre « **=1/(I4+1)** »
- d) Suite $s \Rightarrow$ Explicite, mais définie à partir de $n = 6$
 $\Rightarrow$ on entre directement la formule dans la 7^{ème} case
 $\Rightarrow$ Dans **L9**, on entre « **= 3*K9*K9 -12** »

Corrigé Exercice 13

- 1) $u_1 = 300 \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) = 300 \times 0,97 = 291$ Il y aurait 291 oiseaux de cette espèce en 2018.
- 2) " $B3 = 0,97 * B2$ "
- 3) " $B23 = 300 * 0,98^{A23}$ "

Corrections Savoir Sag. 3

Corrigé Exercice 14

- 1) a. $u_{n+1} = u_n + 5$ 2) a. $a_n = -3a_{n-1}$
b. $W_{n+1} = 7W_n$ b. $b_n = b_{n-1} + 27$
c. $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$ c. $C_n = C_{n-1} + \frac{1}{2}$
d. $y_{n+1} = y_n - 12$ d. $\delta_n = 1,04\delta_{n-1}$
- 3) a. $g_{n+1} = 4g_n$ c. $R_n = R_{n-1} + 36$
b. $H_{n+1} = H_n - 4$ d. $s_n = 7,6s_{n-1}$

- 1) a. $u_{n+1} = u_n - 230$ b. $w_{n+1} = 1,015w_n$
2) a. $D_n = -15D_{n-1}$ b. $c_n = c_{n-1} - 4$
3) a. $t_{n+1} = t_n - 110$ b. $S_{n+1} = \frac{2}{7}S_n$

Corrigé Exercice 15

- 1) a. On a $a_{n+1} = a_n + 16$
 $a_1 = a_0 + 16 = 2 + 16 = 18$; $a_2 = 18 + 16 = 34$
 $a_3 = 34 + 16 = 50$ et $a_4 = 50 + 16 = 66$

- b. $b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n$ Alors $b_2 = \frac{3}{4}b_1 = \frac{3}{4} \times 2500 = 1875$
 $b_3 = \frac{3}{4} \times 1875 = \frac{5625}{4}$ $b_4 = \frac{3}{4} \times \frac{5625}{4} = \frac{16875}{16}$

- c. On a $C_{n+1} = -3C_n \Rightarrow C_1 = -3C_0 = -3 \times 6 = -18$
 $C_2 = -3 \times (-18) = 54$; $C_3 = -3 \times 54 = -162$ et $C_4 = -3 \times (-162) = 486$.

- d. On a $\Delta_{n+1} = \Delta_n - 6$ donc $\Delta_2 = 10 - 6 = 4$; $\Delta_3 = 4 - 6 = -2$ et $\Delta_4 = -2 - 6 = -8$

- a. On a $u_{n+1} = u_n - 5$
 $u_1 = u_0 - 5 = \frac{8}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{7}{3}$
 $u_2 = 43 - 5 = 38$; $u_3 = 33$
- b. On a $w_{n+1} = \frac{3}{2}w_n$ donc $w_1 = \frac{3}{2} \times 7 = \frac{21}{2}$
 $w_2 = \frac{3}{2} \times \frac{21}{2} = \frac{63}{4}$ $w_3 = \frac{189}{8}$ et $w_4 = \frac{567}{16}$.

Corrigé Exercice 16

- 1) a. $U_1 = 59,9 + 0,25 = 60,15$ et $U_2 = 60,15 + 0,25 = 60,4$ b. $U_{n+1} = U_n + 0,25$
c. l'année 1952 correspond au rang $n = 6$ ($1952 - 1946 = 6$ ou $1952 = 1946 + 6$)
à la calculatrice, on trouve $U_6 = 61,4$ **Les hommes avaient une espérance de vie de 61,4 ans en 1952**

2) a. $S_{n+1} = 1,1 \times S_n$

b. $S_1 = 1,1 \times 1\,600 = 1\,760$ et $S_2 = 1,1 \times 1\,760 = 1\,936$

En 2015, le salaire mensuel sera de 1 760 € et en 2016, de 1 936 €

c. L'année 2020 correspond au rang 6 ($2020 - 2014$) On cherche à la calculatrice $S_6 \simeq 2\,834$

Son salaire sera de 2 834 € par mois.

3) a. $u_1 = 4\,200 \times \left(1 + \frac{5,2}{100}\right) = 4\,200 \times 1,052 = 4\,418,4$

Le prix au m² d'un appartement neuf en 2015 sera de 4 418,40 €

b. D'une année sur l'autre, on augmente de 5,2 % ce qui revient à **toujours multiplier par 1,052** : il s'agit d'une suite **géométrique, de raison 1,052 et de 1^{er} terme $u_0 = 4\,200$**

c. $u_{n+1} = 1,052 \times u_n$

d. à la calculatrice, $u_5 \simeq 3\,598,81 \Rightarrow$ En 2020, **Le prix au m² d'un appartement neuf serait de 3 598,81 €**

4) a. $C_0 = 1\,000$ et $C_1 = 1\,000 + 200 = 1\,200$

b. D'un mois à l'autre, on **augmente toujours de la même quantité, 200 €**. La suite (C_n) est une suite arithmétique de **raison $r = 200$ et le 1^{er} terme $C_0 = 1\,000$**

c. $C_{n+1} = C_n + 200$

d. Le 1^{er} mai 2018 correspond au rang $n = 4$ et à la calculatrice, on calcule $C_4 = 1\,800$

Au 1^{er} mai, il y aura 1 800 € sur le compte

5) a. $V_1 = 81,6 \times \left(1 - \frac{5}{100}\right) = 81,6 \times 0,95 = 77,52$ et $V_2 = 77,52 \times 0,95 \simeq 73,64$

En 2017, 77,52 % des employés viendraient travailler en voiture, et 73,64 % en 2018

b. D'une année sur l'autre, on diminue de 5%, ce qui revient à **toujours multiplier par 0,95** : la suite est **géométrique, de raison 0,95 et de premier terme $V_0 = 81,6$** . On a $V_{n+1} = 0,95 \times V_n$.

6) a. $E_1 = E_0 - 28\,000 = 470\,000 - 28\,000 = 442\,000$ **Il y aura 442 000 éléphants d'Afrique en 2014.**

b. D'une année sur l'autre, on **diminue toujours de la même quantité : 28 000**. La suite (E_n) est une suite arithmétique, de premier terme $E_0 = 470\,000$ et de **raison $r = -28\,000$**

c. $E_n = E_{n-1} - 28\,000$.

Corrigé Exercice 17

u_n arithmétique de raison $\frac{1}{2}$	v_n géométrique de raison -3	d_n est stationnaire (arithmétique de raison 0 ou géométrique de raison 1)	y_n arithmétique de raison 2	w_n n'est ni l'un ni l'autre
a_n géométrique de raison 2	z_n n'est ni l'un ni l'autre	c_n géométrique de raison $\frac{1}{4}$	e_n géométrique de raison -1	t_n géométrique de raison $\frac{2}{5}$
p_n n'est ni l'un ni l'autre	g_n n'est ni l'un ni l'autre	$r_{n+1} = -2r_n$ géométrique de raison -2	x_n n'est ni l'un ni l'autre	j_n arithmétique de raison -4

Corrigé Exercice 18

1) a) 4^{ème} niveau : 16 allumettes et 5^{ème} niveaux : 32 allumettes

b) à chaque niveau, on multiplie le nombre d'allumettes par 2

$u_{n+1} = 2u_n$; $u_1 = 2 \Rightarrow$ **suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_1 = 2$**

2) a) 4^{ème} rangée : 15 allumettes et 5^{ème} rangée : 19 allumettes

b) à chaque rangée supplémentaire, on rajoute 2 allumettes d'un côté et 2 allumettes de l'autre...

Donc $\begin{cases} w_{n+1} = w_n + 3 \\ w_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow$ **w est une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $w_1 = 3$**

Corrections Savoir Sag. 4

Corrigé Exercice 19

1) a. $u_n = u_0 + nR = -15 + 24n$

B. $W_n = W_1 \times q^{n-1} = 4 \times 6^{n-1}$

c. $v_n = v_0 \times q^n = 5 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n$ Attention à bien mettre les parenthèses pour la fraction, pour bien signaler que numérateur et dénominateur sont à la puissance n

d. $y_n = y_2 + R(n-2) = 152 - 11(n-2)$

Ne pas hésiter à développer (forme plus identifiable, comme si c'était à partir de y_0) :

$y_n = 152 - 11n + 22 = 174 - 11n$

2) a. $g_n = g_0 \times q^n = -9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

b. $H_n = H_1 + R(n-1) = 0 - 3(n-1) = 3 - 3n$

c. $R_n = R_0 + nR = 0,7 + 1,3n$ d. $s_n = s_2 \times q^{n-2} = -10 \times 1,06^{n-2}$

1) a. $u_n = u_1 + R(n-1) = 7 - 2(n-1)$

$= 7 - 2n + 2 = 9 - 2n$

b. $w_n = w_0 \times q^n = 42 \times (-1)^n$

c. $D_n = D_1 \times q^{n-1} = 12 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$

d. $c_n = c_0 + nR = \frac{1}{2} + \frac{4}{3}n$

2) a. $t_n = t_2 + R(n-2) = 30 - 10(n-2)$
 $= 50 - 10n$

b. $S_n = S_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Corrigé Exercice 20

a. On a $a_n = a_0 + nR = 203 - 18n$
donc $a_{24} = 203 - 18 \times 24 = -229$

b. $b_n = b_1 \times q^{n-1} = 6 \times 1,5^{n-1}$
donc $b_9 = 6 \times 1,5^8 \approx 153,77$

c. $C_n = C_0 \times q^n = 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$
et donc $C_{11} = 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{11} = -\frac{120}{2^{11}} = -\frac{120}{2048} = -\frac{15}{256}$

d. $\Delta_n = \Delta_2 + R(n-2) = -2 + \frac{7}{3}(n-2)$ donc $\Delta_{20} = -2 + \frac{7}{3} \times 18 = -2 + 42 = 40$

a. $u_n = u_1 + R(n-1) = -50 + 12(n-1)$

$u_n = -62 + 12n$

et $u_{24} = -62 + 12 \times 24 = 226$

b. $w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{64} \times (-2)^n$

donc $w_8 = \frac{(-2)^8}{64} = \frac{256}{64} = 4$

Corrigé Exercice 21

1) a) dans un an : 18 ordis - dans deux ans : 21 ordis

b) Chaque année, le nombre d'ordinateur augmente de 3, donc $\begin{cases} v_{n+1} = v_n + 3 \\ v_0 = 15 \end{cases}$

C'est une suite géométrique de raison 3 $\Rightarrow v_n = v_0 + rn = 15 + 3n$

c) $u_n \geq 50 \Leftrightarrow 15 + 3n \geq 50 \Leftrightarrow 3n \geq 35 \Leftrightarrow n \geq \frac{35}{3}$ or $\frac{35}{3} \approx 11,667$ donc pour $n \geq 12$

Au bout de 12 ans

2) a) Si on double, il s'agit d'une suite géométrique de raison 2 et de 1^{er} terme $b_0 = 10 \times 10^6 = 10^7$

$\Rightarrow b_n = b_0 \times q^n = 10^7 \times 2^n$

b) $b_{24} = 10^7 \times 2^{24} = 167\,772\,160\,000\,000$ soit environ **167 mille milliards...** (mieux vaut ne pas laisser trainer une culture de bactérie... encore que ça a donné lieu à de belles découvertes médicales)

3) On appelle S_n la superficie estimée en l'année (2001 + n)

On a $\begin{cases} s_{n+1} = s_n - 30\,000 \\ s_0 = 3\,506\,000 \end{cases} \Rightarrow$ Suite arithmétique $\Rightarrow S_n = s_0 + rn = 3\,506\,000 - 30\,000n$

Aujourd'hui, pour $n = 12$, on a $S_{12} = 3\,146\,000 \text{ km}^2$

Corrigé Exercice 22

x_n géométrique de raison -2 et de 1^{er} terme $x_0 = 1$

v_n arithmétique de raison -3 et de 1^{er} terme $v_0 = 1$

w_n ni l'un ni l'autre

y_n arithmétique de raison -1 et de 1^{er} terme $y_0 = 7$

$e_n = 3 \times 2 \times 2^n$ géométrique de raison 2 et de 1^{er} terme $e_0 = 6$

b_n géométrique de raison 5 et de 1^{er} terme $b_1 = -2$

$w_n = 14^n$ géométrique de raison 14 et de 1^{er} terme $w_0 = 1$

c_n arithmétique de raison 4 et de 1^{er} terme $c_0 = 0$

$s_n = \frac{1}{5} \times 3^n$ géométrique de raison 3 et de 1^{er} terme $s_0 = \frac{1}{5}$

g_n ni l'un ni l'autre

$d_n = 4 \times \frac{1}{3^n}$
 $= 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de 1^{er} terme $d_0 = 4$

q_n arithmétique de raison 5 et de 1^{er} terme $q_1 = 3$

r_n ni l'un ni l'autre

t_n arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme $t_0 = -\frac{1}{3}$

h_n géométrique de raison -1 et de 1^{er} terme $h_n = 3$

Corrigé Exercice 23

1) a) $V_1 = 28 \text{ m}^3$ et $V_2 \simeq 26,1 \text{ m}^3$

b) $V_{n+1} = \frac{14}{15} V_n \Rightarrow$ la suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{14}{15}$

c) $V_n = V_0 \times q^n = 30 \times \left(\frac{14}{15}\right)^n$

d) $V_5 = 30 \times \left(\frac{14}{15}\right)^5 \simeq 21,2 \Rightarrow$ Il restera environ 21 m^3 d'eau dans la mare au bout de la 5ème semaine.

e) La suite est de raison positive inférieure à 1 $\Rightarrow$ elle est décroissante

On cherche à résoudre $V_n < 15$

À la calculatrice, on trouve $V_{10} \simeq 15,04$ et $V_{11} \simeq 14,04$

Au bout de 11 semaines de sécheresse la mare aura diminué de moitié

2) a) $u_n = 0,5 u_{n-1}$. b) Suite géométrique de raison 0,5

c) $u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times 0,5^n \Rightarrow \frac{u_n}{u_0} = 0,5^n$

d) La suite $\left(\frac{u_n}{u_0}\right)$ est de raison positive inférieure à 1 $\Rightarrow$ elle est décroissante.

$\Rightarrow$ On cherche $\frac{u_n}{u_0} < 0,01$ À la calculatrice, on trouve $\frac{u_6}{u_0} = 0,5^6 \simeq 0,016$ et $\frac{u_7}{u_0} = 0,5^7 \simeq 0,008$

C'est donc au bout de 7 demi-vies, soit $7 \times 8 = 56$ jours, que la quantité restante d'iode 131 devient inférieure à 1% de la quantité émise lors de la catastrophe.

e) Avec la même démarche, on trouve cette fois $7 \times 30 = 210$ ans !!!

3) a) On appelle n le nombre d'heures écoulées à partir du moment où on remonte la pendule (à 15h16). On appelle R_n le retard pris par la pendule (On a $R_0 = 0$)

Attention, il faut convertir les minutes et les secondes en heures : $1 \text{ mn} = \frac{1}{60} \text{ h}$ et $1 \text{ s} = \frac{1}{3600} \text{ h}$

À chaque heure, la pendule retarde de 1min et 10 seconde (70 secondes, donc $\frac{70}{3600}$ d'heure)

$\Rightarrow$ Il s'agit d'une suite arithmétique : Récurrence :
$$\begin{cases} R_{n+1} = R_n + \frac{7}{360} \\ R_0 = 0 \end{cases}$$

Explicite : $R_n = R_0 + nR \Rightarrow R_n = \frac{7}{360} \times n$

b) Au bout de 3 jours, il y a $3 \times 24 = 72$ heures écoulées $\Rightarrow R_{72} = \frac{7}{360} \times 72 = 1,4$

Conversion 0,4 heures $\Rightarrow 0,4 \times 60 = 24$ minutes

Le retard pris par la pendule est donc de 1 heure et 24 minutes

À la même heure, elle marquera donc **13h52 !**

$(15\text{h}16 - 1\text{h}24 = 13\text{h}52)$

Corrigé Exercice 23 (fin)

4) a) Si n est le numéro de la case de l'échiquier (on commence à $n = 1$) et r_n le nombre de grains de riz qu'il faut placer sur la n -ième case de l'échiquier, on a $r_1 = 1$ et $r_{n+1} = 2 \times r_n \Rightarrow$ suite géométrique de raison 2

b) À la calculatrice $r_{16} = 32\,768$ grains de riz

c) $\begin{cases} 1000 \text{ grains pour } 28 \text{ g} \\ ? \text{ grains pour } 1000 \text{ g} \end{cases} \Rightarrow$ Il faut 35 715 grains de riz... Par contre, attention, il faut additionner les grains de toutes les cases... On vient de voir qu'à la 16^{ème} case, on a en gros 33 000 grains de riz, à la 15^{ème}, la moitié etc... Donc si on additionne toutes les cases jusqu'à la 15^{ème}, on ne dépassera pas 33 000, il faut donc aller jusqu'à la **case 16**.

Si mon explication ne vous convainc pas (elle est en effet peu mathématique), le plus simple c'est de faire la suite qui additionne toutes les cases : $S_n = r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1} + r_n$. Au tableur c'est assez simple, on trouve bien $S_{15} = 32\,767$ et $S_{16} = 65\,535$... CQFD

Sachez que, au final, le nombre de grains de riz que le sultan devra trouver pour remplir l'échiquier est $2^{64} - 1$, soit **18 446 744 073 709 551 615** grains de riz (18 milliards de milliards).

Si toute la surface arable de la terre produisait du riz, et rien que du riz, cela représenterait la production des prochaines 80 années (environ **4 millions de millions de tonnes de riz**).

Autre façon de dire la même chose, si ces grains de riz étaient mis bout à bout, cela représenterait la distance de la Terre à Alpha du Centaure (l'étoile la plus proche de la Terre après le soleil). Aller et retour !