

Savoir C. 4: Inéquations, positions relatives

Entraînement 1

1) Résoudre les inéquations suivantes : a) $-x^2 + 6x \leq 5$ b) $2x + 4 \leq 3x - 8$

2) Résoudre : a) $\frac{x^2 - 5x - 6}{-2x^2 + 4x + 6} > 0$ b) $\frac{4 - 2x}{-3x(x + 1)} \geq 0$ c) $\frac{x}{x+1} \leq 2x$

3) On définit pour $x > 0$ les fonctions $h(x) = x + 5$ et $i(x) = \frac{7}{x} - 1$ et $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_i$ leurs courbes représentatives dans un repère

- a. Montrer que, pour tout $x > 0$, $h(x) - i(x) = \frac{x^2 + 6x - 7}{x}$
b. En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_h$ et $\mathcal{C}_i$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Entraînement 2

1) Résoudre les inéquations suivantes : a) $-1 \leq -3x + 5$ b) $9 < 3x(x + 2)$

2) Résoudre : a) $\frac{x^2 - 2x + 1}{-2x^2 + 4x - 6} > 0$ b) $\frac{-2x(x + 1)^2}{3 - 3x} \geq 0$ c) $(x^2 - 4)^2 \geq 25$

3) On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par : $f(x) = 6xe^{1-x}$ et $g(x) = 2x^2e^{1-x}$

Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de la fonction f , et de $\mathcal{C}_g$, courbe représentative de la fonction g .

Entraînement 3

1) Résoudre les inéquations suivantes : a) $1 + 3x^2 > 0$ b) $x(1 - 2x) \geq -15$

2) Résoudre : a) $-3x(2x + 2)(1 - x)^2 \geq 0$ b) $\frac{4x^2 - 12x + 9}{-3x^2 + 6x} > 0$ c) $\frac{4x + 1}{2x - 4} \leq \frac{3}{x} - 1$

3) On définit pour $x \geq 0$ et $x \neq 4$ les fonctions f et g par : $f(x) = \frac{-x}{4-x}$ et $g(x) = 2x + 1$

Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, courbes représentatives des fonctions f et g .

Corrections Savoir C. 4

Corrigé Entraînement n°1

1) a) $-x^2 + 6x - 5 \leq 0 \rightarrow \Delta = 16; x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 5$
 $-x^2 + 6x - 5$ est négatif à l'extérieur des racines

Donc $S =]-\infty; 1] \cup [5; +\infty[$

b) $2x - 3x \leq -8 - 4 \Leftrightarrow -x \leq -12$
 $\Leftrightarrow x \geq 12$

$S = [12; +\infty[$

2) a) $\frac{x^2 - 5x - 6}{-2x^2 + 4x + 6} > 0$

Numérateur : $\Rightarrow \Delta = 49; x_1 = 6 \text{ et } x_2 = -1$

Dénominateur : $\Rightarrow \Delta = 64; x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 3$

L'inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$

x	$-\infty$	-1		3		6	$+\infty$
$x^2 - 5x - 6$	+	0	-		-	0	+
$-2x^2 + 4x + 6$	-	0	+	0	-		-
Q	-		-		+	0	-

$\Rightarrow S =]3; 6[$

b) $\frac{4 - 2x}{-3x(x + 1)} \geq 0$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

x	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
$4 - 2x$	+		+		+	0	-
$-3x$	+		+	0	-		-
$x + 1$	-	0	+		+		+
Q	-		+		-	0	+

$\Rightarrow S =]-1; 0] \cup [2; +\infty[$

c) $\frac{x}{x+1} \leq 2x \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} - 2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x - 2x(x+1)}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - x}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x(2x+1)}{x+1} \leq 0$

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
$-x$	+		+		+	0	-
$x + 1$	-	0	+		+		+
$2x + 1$	-		-	0	+		+
Q	+		-	0	+	0	-

$S =]-1; -\frac{1}{2}] \cup [0; +\infty[$

3) a. $h(x) - i(x) = x + 5 - \left(\frac{7}{x} - 1\right) = x + 6 - \frac{7}{x} = \frac{x^2 + 6x - 7}{x}$

b. $\Delta = 64; x_1 = -7; x_2 = 1$

x	0	1	$+\infty$	
$x^2 + 6x - 7$		-	0	+
x	0	+		+
$h(x) - i(x)$		-	0	+

$\mathcal{C}_h$ est au dessous de $\mathcal{C}_i$ sur $]0; 1[$ et au dessus sur $]1; +\infty[$

Corrigé Entraînement n°2

1) a) $3x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq 2$

Donc $S =]-\infty ; 2]$

b) $9 \leq 3x^2 + 6x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0$
 $\rightarrow \Delta = 4 + 12 = 16 \rightarrow x_1 = 1 ; x_2 = -3$

$S =]-\infty ; -3] \cup [1 ; +\infty[$

2) a) $\frac{x^2 - 2x + 1}{-2x^2 + 4x - 6} > 0$

Numérateur : $\Rightarrow \Delta = 0 ; x_0 = 1$ il est de signe constant, ici positif

Dénominateur : $\Rightarrow \Delta = -32$; il ne s'annule jamais, il est de signe constant, ici négatif

L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$	+	0	+
$-2x^2 + 4x - 6$	-		-
Q	-	0	-

$\Rightarrow S = \emptyset$

b) $\frac{-2x(x+1)^2}{3-3x} \geq 0$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$-2x$	+		+	0	-
$(x+1)^2$	+	0	+		+
$3-3x$	+		+	+	0
Q	+	0	+	0	-

$\Rightarrow S =]-\infty ; 0] \cup [1 ; +\infty[$

c) $(x^2 - 4)^2 \geq 25 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 - 25 \geq 0 \Leftrightarrow ((x^2 - 4) + 5)((x^2 - 4) - 5) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 - 9) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x + 3)(x - 3) \geq 0$

Or $x^2 + 1$ est la somme de deux termes toujours positifs, donc est toujours positif

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$x^2 + 1$	+		+	+
$x^2 - 9$	-		+	0
P	-	0	+	0

$S = [-3 ; 3]$

3) On a $f(x) - g(x) = 6xe^{1-x} - 2x^2e^{1-x} = (6x - 2x^2)e^{1-x}$

or $6x - 2x^2 = 2x(3 - x)$ s'annule en $x = 0$ et en $x = 3$

On a donc

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$-2x^2 + 6x$	-	0	+	0
e^{1-x}	+		+	
$f(x) - g(x)$	-	0	+	0

Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ pour $x \in]-\infty ; 0] \cup [3 ; +\infty[$ et au dessus pour $x \in [0 ; 3]$

Corrigé Entraînement 3

1) a) $\Leftrightarrow 3x^2 > -1$

Or un carré étant positif, il est supérieur à tout nombre négatif . $S = \mathbb{R}$

b) $\Leftrightarrow -2x^2 + x + 15 \geq 0 \Rightarrow \Delta = 121 ; x_1 = -\frac{5}{2}$ et $x_2 = 3$

Il est négatif à l'extérieur des racines : $S = [-\frac{5}{2} ; 3]$

2) a) $-3x(2x + 2)(1 - x)^2 \geq 0$

$\Rightarrow S = [-1 ; 0] \cup \{1\}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$-3x$	+		+	0	-
$2x + 2$	-	0	+		+
$(1 - x)^2$	+		+		0
Q	-	0	+	0	-

b) $\frac{4x^2 - 12x + 9}{-3x^2 + 6x} > 0$

Numérateur : $\Rightarrow \Delta = 0 ; x_0 = \frac{3}{2}$

Dénominateur : $\Rightarrow -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$

L'inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0 ; 2\}$

x	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$4x^2 - 12x + 9$	+		+	0	+
$-3x^2 + 6x$	-	0	+		+
Q	-		+	0	+

$\Rightarrow S =]0 ; \frac{3}{2}[\cup]\frac{3}{2} ; 2[$

c) L'inéquation est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0 ; 2\}$

$\Leftrightarrow \frac{4x + 1}{2x - 4} - \frac{3}{x} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(4x + 1) - 3(2x - 4) + x(2x - 4)}{x(2x - 4)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{12 - 3x}{x(2x - 4)} \leq 0$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$12 - 3x$	+		+		+
x	-	0	+		+
$2x - 4$	-		-	0	+
Q	+		-		+

$S =]0 ; 2[\cup]4 ; +\infty[$

3) On a

$f(x) - g(x) = \frac{-x}{4 - x} - (2x + 1) = \frac{-x - (2x + 1)(4 - x)}{4 - x} = \frac{-x - (-2x^2 + 7x + 4)}{4 - x} = \frac{-x + 2x^2 - 7x - 4}{4 - x}$

$f(x) - g(x) = \frac{2x^2 - 8x - 4}{4 - x}$

On a alors, pour le dénominateur, $\Delta = 64 + 32 = 100$ et $x_1 = \frac{8+10}{4} = \frac{9}{2}$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$

Donc

x	0	4	$\frac{9}{2}$	$+\infty$
$2x^2 - 8x - 4$	-		-	0
$4 - x$	+	0	-	
$f(x) - g(x)$	-		+	0

Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de $\mathcal{C}_g$ pour $x \in [0 ; 4[\cup]\frac{9}{2} ; +\infty[$ et au dessus pour $x \in]4 ; \frac{9}{2}]$