

Savoir Si. 3 : Théorèmes de comparaison

Entraînement 1

- 1) On donne les encadrements suivants :
- a) $2 - e^{-n} \leq u_n \leq 2 + e^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- b) $5 - n^2 \leq v_n \leq 5 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Déterminer les limites des suites, en justifiant.

- 2) On donne pour $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2n + 3$ et $w_0 = 1$
- a) Démontrer par récurrence (abrégée) que, pour tout entier naturel n , on a $w_n \geq n^2$
- b) En déduire la limite de (w_n)
- 3) On donne pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2 \cos n}{1-n^2}$.
- a) Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\frac{2}{1-n^2} \leq u_n \leq \frac{2}{n^2-1}$
- b) En déduire la limite de (u_n)

Entraînement 2

- 1) On donne les encadrements suivants :
- a) $0 \leq a_n - 2 \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $2^n - 1 \leq b_n \leq 2^n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n) , en justifiant.

- 2) On donne pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\frac{1}{1-2^n} \leq w_n \leq \frac{1}{2^n-1}$
- En déduire la limite de (w_n)
- 3) On donne pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sin(2n) - 2n$. Déterminer la limite de (x_n)

Entraînement 3

- 1) On donne les encadrements suivants :
- a) $\sqrt{n} \leq u_n \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $\frac{3n-1}{n^3+1} \leq v_n \leq \frac{3n+1}{n^3-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Déterminer les limites des suites, en justifiant.

- 2) On donne pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$ et $a_0 = 1$
- a) Démontrer par récurrence (abrégée) que, pour tout entier naturel n , on a $a_n \geq n + 1$
- b) En déduire la limite de (x_n)

- 3) On donne pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$

On admet que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $n \leq 1 + 2 + 3 + \dots + n \leq n^2$

- a) En déduire un encadrement pour S_n pour tout entier naturel $n \geq 1$
- b) En déduire la limite de (S_n)

Entraînement 4

- 1) On donne les encadrements suivants : **a)** $n^2 - 1 \leq u_n \leq n^2 + 1$ **b)** $3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq v_n \leq 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$
pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Déterminer les limites des suites, en justifiant.

- 2) On donne pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{n+(-1)^n}{n^2}$. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\frac{1-\frac{1}{n}}{n} \leq w_n \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{n}$
En déduire la limite de (w_n)

- 3) On donne pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 2x_n - 1$ et $x_0 = 4$

- a)** Démontrer par récurrence (abrégée) que, pour tout entier naturel n , on a $x_n \geq 2^n + 1$
b) En déduire la limite de (x_n)
-

Entraînement 5

- 1) On donne les encadrements suivants : **a)** $1 - \frac{2}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n^2}$ **b)** $3n - 1 \leq v_n \leq 3n^2 - n$
pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Déterminer les limites des suites, en justifiant.

- 2) On donne pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{2n + \cos(2n)}{n}$.

- a)** Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $2 - \frac{1}{n} \leq w_n \leq 2 + \frac{1}{n}$
b) En déduire la limite de (w_n)

- 3) On donne pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = 3x_n - 2$ et $x_0 = -2$

- a)** Démontrer par récurrence (abrégée) que, pour tout entier naturel n , on a $x_n \leq 1 - 3^n$
b) En déduire la limite de (x_n)
-

Entraînement 6

- 1) On donne les encadrements suivants : **a)** $\frac{1-n}{n^2} \leq u_n \leq \frac{1+n}{n^2}$ **b)** $\frac{1-2n^2}{n} \leq v_n \leq \frac{1-n^2}{n}$
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Déterminer les limites des suites, en justifiant.

- 2) On donne pour $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{3}{2}w_n + 1$ et $w_0 = 2$

- a)** Démontrer par récurrence (abrégée) que, pour tout entier naturel n , on a $w_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$
b) En déduire la limite de (w_n)

- 3) On donne pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$.

- a)** Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a : $\frac{3n^2-1}{n^2+1} \leq x_n \leq \frac{3n^2+1}{n^2+1}$
b) En déduire la limite de (w_n)

Corrigé Entraînement 1

1) a) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - e^{-n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + e^{-n} = 2$. D'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5 - n = -\infty$ et $v_n < 5 - n$. D'après le **théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

2) a) **Initialisation** : $w_0 = 1 > 0^2$ Donc $w_n \geq n^2$ vraie pour $n = 0$

Hd : Si $w_n \geq n^2$ est vraie pour $n = p$ alors on a $w_p \geq p^2$

D'une part $w_{p+1} = w_p + 2p + 3 \Rightarrow w_{p+1} \geq p^2 + 2p + 3$ et d'autre part $(p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$.

$\Rightarrow w_{p+1} \geq (p+1)^2 + 2$ et en élargissant $\Rightarrow w_{p+1} \geq (p+1)^2$ **Donc $w_n \geq n^2$ vraie pour $n = p+1$**

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $w_n \geq n^2$

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $w_n \geq n^2$ D'après le **théorème de comparaison** $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$

3) a) On a $-1 \leq \cos n \leq 1$ donc $-2 \leq 2 \cos n \leq 2$ et, comme $n^2 - 1 > 0$ pour $n \geq 1$,

on a : $\frac{-2}{n^2-1} \leq u_n \leq \frac{2}{n^2-1}$ et donc $\frac{2}{1-n^2} \leq u_n \leq \frac{2}{n^2-1}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{1-n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2-1} = 0$ Donc, d'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Corrigé Entraînement 2

1) a) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ D'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n - 2 = 0$

Et donc, par somme de limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 1 = +\infty$ et $b_n \geq 2^n - 1$ D'après le **théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2) a) On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ et comme pour $n \geq 1$, on a $2^n - 1 > 0$, alors : $\frac{-1}{2^n-1} \leq \frac{(-1)^n}{2^n-1} \leq \frac{1}{2^n-1}$

donc $\frac{1}{1-2^n} \leq w_n \leq \frac{1}{2^n-1}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{2^n-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n-1} = 0$ Donc, d'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

3) On a pour tout n : $\sin(2n) \leq 1$ donc $\sin(2n) - 2n \leq 1 - 2n$ donc $x_n \leq 1 - 2n$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 2n = -\infty$ et $x_n \leq 1 - 2n$ D'après le **théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$

Corrigé Entraînement 3

1) a) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $u_n \geq \sqrt{n}$ D'après le **théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

b) $\frac{3n-1}{n^3+1} = \frac{n(3-\frac{1}{n})}{n^3(1+\frac{1}{n^3})} = \frac{3-\frac{1}{n}}{n^2(1+\frac{1}{n^3})}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{n} = 3$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(1 + \frac{1}{n^3}) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-1}{n^3+1} = 0$

De la même façon $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n^3-1} = 0$

Donc d'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

2) a) Initialisation : $a_0 = 1 \geq 0 + 1$ **Donc $a_n \geq n + 1$ vraie pour $n = 0$**

Hd : **Si $a_n \geq n + 1$ vraie pour $n = p$** , alors on a $a_p \geq p + 1$

$$a_{p+1} = a_p^2 + a_p + 1 \Rightarrow a_{p+1} \geq a_p^2 + p + 1 + 1 \quad \text{et comme } a_p^2 \geq 0 \text{ on a donc : } a_{p+1} \geq (p + 1) + 1$$

Donc $a_n \geq n + 1$ vraie pour $n = p + 1$

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \geq n + 1$

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty$ et $a_n \geq n + 1$ D'après le **théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

3) a) On sait que $0 < n \leq 1 + 2 + 3 + \dots + n \leq n^2$ On peut donc passer à l'inverse :

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{1+2+3+\dots+n} \geq \frac{1}{n^2} \quad \text{et donc } \frac{1}{n^2} \leq S_n \leq \frac{1}{n}$$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ Donc, d'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$

Corrigé Entraînement 4

1) a) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ et $u_n \geq n^2 - 1$ D'après le **théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

b) comme $\frac{2}{3} \in]-1; 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 3$ D'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$

2) a) On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $n - 1 \leq (-1)^n \leq n + 1$ et, comme $n^2 > 0$, on a : $\frac{n-1}{n^2} \leq (-1)^n \leq \frac{n+1}{n^2}$

En factorisant : $\frac{n(1-\frac{1}{n})}{n^2} \leq (-1)^n \leq \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^2} \Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{n}}{n} \leq w_n \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{n}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n} = 0$ Donc, d'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

3) a) Initialisation : $2^0 + 1 = 2$ et $x_0 = 4 > 2$ **Donc $x_n \geq 2^n + 1$ vraie pour $n = 0$**

Hd : **Si $x_n \geq 2^n + 1$ est vraie pour $n = p$** , alors on a $x_p \geq 2^p + 1$

$$x_{p+1} = 2x_p - 1 \geq 2 \times (2^p + 1) - 1 \Rightarrow x_{p+1} \geq 2^{p+1} + 2 - 1 \Rightarrow x_{p+1} \geq 2^{p+1} + 1$$

Donc $x_n \geq 2^n + 1$ vraie pour $n = p + 1$

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \geq 2^n + 1$

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n + 1 = +\infty$ et $x_n \geq 2^n + 1$ D'après le **théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

Corrigé Entraînement 5

1) a) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{n^2} = 1$ D'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n - 1 = +\infty$ et $v_n \geq 3n - 1 \Rightarrow$ D'après le **théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

2) a) On a $-1 \leq \cos(2n) \leq 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leq 2n + \cos(2n) \leq 2n + 1$

et, **comme** > 0 , on a : $\frac{2n-1}{n} \leq \frac{2n+\cos(2n)}{n} \leq \frac{2n+1}{n} \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{n} \leq w_n \leq 2 + \frac{1}{n}$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$ Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$

3) a) Initialisation : $1 - 3^0 = 0$ et $x_0 = -2 < 0$ **Donc $x_n \leq 1 - 3^n$ vraie pour $n = 0$**

Hd : **Si $x_n \leq 1 - 3^n$ vraie pour $n = p$** , alors on a $x_p \leq 1 - 3^p$

$$x_{p+1} = 3x_p - 2 \leq 3 \times (1 - 3^p) - 2 \Rightarrow x_{p+1} \leq 3 - 3^{p+1} - 2 \Rightarrow x_{p+1} \leq 1 - 3^{p+1}$$

Donc $x_n \leq 1 - 3^n$ vraie pour $n = p + 1$

Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \leq 1 - 3^n$

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - 3^n = -\infty$ et $x_n \leq 1 - 3^n$ D'après le **théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$

Corrigé Entraînement 6

1) a) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(\frac{1}{n}-1)}{n \times n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}-1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n}+1}{n} = 0$

D'après le **théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

b) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(\frac{1}{n^2}-1)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(\frac{1}{n^2}-1\right) = -\infty$ Or on a $v_n \leq \frac{1-n^2}{n}$

D'après le **théorème de comparaison**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

2) a) Initialisation : $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$ et $w_0 = 2 > 1$ **Donc $w_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ vraie pour $n = 0$**

Hd : Si $w_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ vraie pour $n = p$ alors on a $w_p \geq \left(\frac{3}{2}\right)^p$

$$w_{p+1} = \frac{3}{2}w_p + 1 \geq \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^p + 1 \Rightarrow w_{p+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{p+1} + 1 \text{ et par élargissement } w_{p+1} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{p+1}$$

Donc $w_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ vraie pour $n = p + 1$ Ccl : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $w_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ et $w_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ D'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$

3) a) On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $3n^2 - 1 \leq (-1)^n \leq 3n^2 + 1$ et, **comme** $n^2 + 1 > 0$, on a :

$$\frac{3n^2 - 1}{n^2 + 1} \leq x_n \leq \frac{3n^2 + 1}{n^2 + 1}$$

b) En factorisant : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2-1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(3-\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{1} = 3$

De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2+1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = 3$ **Donc, d'après le théorème des gendarmes**, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$