

Savoir Fle. 5 : Inéquations et tableaux de signes

Entraînement 1

1) Résoudre les inéquations suivantes, sur l'ensemble de définition donné :

a) $2e^{0,5x-2} - 1 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ b) $4 + 3 \ln x \leq 7$ pour $x > 0$ c) $2e^x - 5 < 3$ sur $\mathbb{R}$

2) Déterminer le tableau de signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(2x - 4)$ pour $D_f =]2; +\infty[$ b) $g(x) = 2 - \ln(1 + x)$ sur $D_g =]-1; +\infty[$

3) On donne $w_n = 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$. Déterminer le rang à partir duquel on a $w_n \leq 1$.

Entraînement 2

1) Résoudre les inéquations suivantes, sur l'ensemble de définition donné :

a) $\frac{\ln x}{2} + 4 \geq 0$ sur $D =]0; +\infty[$ b) $3 - 0,1e^x < 2$ sur $\mathbb{R}$ c) $\ln(4 - 2x) < -1$ pour $x < 2$

2) Déterminer le tableau de signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -3x \ln(3 - x)$ pour $D_f =]-\infty; 3[$ b) $h(x) = \frac{1}{2}e^{3-x} - 3$ sur $\mathbb{R}$

3) Résoudre dans $\mathbb{N}$: $30 + 2 \times 4^n > 30\,000$

Entraînement 3

1) Résoudre les inéquations suivantes, sur l'ensemble de définition donné :

a) $1 - e^{x^2-4} \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ b) $3e^{2x} - 5 > 1$ sur $\mathbb{R}$ c) $5 - 4 \ln x \leq 2$ pour $x > 0$

2) Déterminer le tableau de signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(3 - x)$ sur $[-3; 3[$ b) $g(x) = \ln 2 - \ln(1 - x)$ sur $D_g =]-\infty; 1[$

3) Soit la suite $a_n = 2 \times 3^n - 680$. À partir de quel rang a-t-on $a_n \geq 12\,000$?

Entraînement 4

1) Résoudre les inéquations suivantes, sur l'ensemble de définition donné :

a) $5 - \ln x \geq 3$ sur $D =]0; +\infty[$ b) $15 - e^{x+2} < 10$ sur $\mathbb{R}$ c) $e^{3-2x} - 1 < 0$ sur $\mathbb{R}$

2) Déterminer le tableau de signe des fonctions suivantes :

a) $h(x) = \ln(5 - 2x)$ sur $[0; 2,5[$ b) $k(x) = \frac{1}{2}(\ln x - 1)$ pour $x > 0$

3) Résoudre dans $\mathbb{N}$: $10 \times 0,9^n + 250 < 252$

Entraînement 5

1) Résoudre les inéquations suivantes, sur l'ensemble de définition donné :

a) $2 - \ln(1 + x) \geq 0$ pour $x > -1$

b) $\frac{2e^x - 1}{3} \leq 1$ sur $\mathbb{R}$

c) $2 - e^{-4x} \leq 0$ sur $[-1; 1]$

2) Déterminer le tableau de signe des fonctions suivantes :

a) $\phi(x) = 2 + \ln(2x - 4)$ sur $]2; 5]$

b) $f(x) = x \ln(4 - x^2)$ avec $D_f =]-2; 2[$

3) La suite (u_n) de terme général $u_n = 102 - 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une suite croissante. À partir de quel rang passe-t-elle le seuil de 100 ?

Corrections Savoir Fle.5

Corrigé Entraînement 1

1) a) $2e^{0,5x-2} - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow e^{0,5x-2} \geq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0,5x - 2 \geq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 0,5x \geq 2 - \ln 2$

$\Leftrightarrow x \geq 4 - 2 \ln 2$

$S = [4 - 2 \ln 2; +\infty[$

b) $4 + 3 \ln x \leq 7$

$\Leftrightarrow 3 \ln x < 3$

$\Leftrightarrow \ln x \leq 1$

$\Leftrightarrow x \leq e$ mais on doit avoir $x > 0$

$S =]0; e]$

c) $2e^x - 5 < 3$

$\Leftrightarrow 2e^x < 8$

$\Leftrightarrow e^x < 4$

$\Leftrightarrow x < \ln 4$

$S =]-\infty; \ln 4[$

2) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(2x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 4 \geq 1$

$\Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$

x	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f(x)$		- 0 +	

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 - \ln(1 + x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln(x + 1) \leq 2 \Leftrightarrow x + 1 \leq e^2$

$\Leftrightarrow x \leq e^2 - 1$

x	-1	$e^2 - 1$	$+\infty$
$g(x)$		+ 0 -	

3) $w_n \leq 1 \Leftrightarrow 100 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^n \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{4}{5}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right)$

et $\ln\left(\frac{4}{5}\right) < 0$ donc $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}$ Or $\frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \simeq 20,6$ donc : $n \geq 21$ à partir du rang 21

Corrigé Entraînement 2

1) a) $\frac{\ln x}{2} + 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln x \geq -4 \times 2$

$\Leftrightarrow x \geq e^{-8}$

$S = [e^{-8}; +\infty[$

b) $3 - 0,1e^x < 2$

$\Leftrightarrow e^x > \frac{2-3}{-0,1}$

$\Leftrightarrow e^x > 10$

$\Leftrightarrow x > \ln 10$

$S =]\ln 10; +\infty[$

c) $\ln(4 - 2x) < -1 \Leftrightarrow 4 - 2x < e^{-1}$

$\Leftrightarrow -2x < \frac{1}{e} - 4$

$\Leftrightarrow x > 2 - \frac{1}{2e}$ mais on doit avoir $x < 2$

Donc $S = \left]2 - \frac{1}{2e}; 2\right[$

2) Pour f , il faut faire un tableau de signe, et donc déterminer le signe de $\ln(3 - x)$

$\ln(3 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 - x \geq 1 \Rightarrow x \leq 2$

x	$-\infty$	0	2	3
$-3x$		+ 0 -	-	
$\ln(3 - x)$		+	+ 0 -	
$f(x)$		+ 0 -	0 +	

$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{3-x} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow e^{3-x} \geq 6$

$\Leftrightarrow 3 - x \geq \ln 6 \Leftrightarrow 3 - \ln 6 \geq x$

x	$-\infty$	$3 - \ln 6$	$+\infty$
$h(x)$		+ 0 -	

3) $30 + 2 \times 4^n > 30\,000 \Leftrightarrow 4^n > 14\,985 \Leftrightarrow \ln(4^n) > \ln 14\,985 \Leftrightarrow n \ln 4 > \ln 14\,985$ or $\ln 4 > 0$
donc $n > \frac{\ln 14\,985}{\ln 4}$ avec $\frac{\ln 14\,985}{\ln 4} \simeq 6,9$ Donc dans $\mathbb{N}$: $n \geq 7$

Corrigé Entraînement 3

1) a) $1 - e^{x^2-4} \geq 0 \Leftrightarrow e^{x^2-4} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow S = [-2; 2]$

b) $3e^{2x} - 5 > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > \frac{6}{3} \Leftrightarrow 2x > \ln 2 \Leftrightarrow x > \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow S = \left] \frac{\ln 2}{2}; +\infty \right[$

c) $5 - 4 \ln x \leq 2 \Leftrightarrow -4 \ln x \leq -3 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \geq e^{\frac{3}{4}} \Rightarrow S = \left[e^{\frac{3}{4}}; +\infty \right[$

2) $\ln(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow 3-x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 2$

x	-3	2	3
$f(x)$	+	0	-

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln 2 - \ln(1-x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \ln 2 \geq \ln(1-x) \Leftrightarrow 2 \geq 1-x \Leftrightarrow x \geq -1$

x	$-\infty$	-1	1
$g(x)$	-	0	+

3) $a_n \geq 12\,000 \Leftrightarrow 2 \times 3^n - 680 \geq 12\,000 \Leftrightarrow 2 \times 3^n \geq 12\,680 \Leftrightarrow 3^n \geq 6\,340$

$\Leftrightarrow \ln(3^n) \geq \ln 6340 \Leftrightarrow n \ln 3 \geq \ln 6340 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 6340}{\ln 3} \text{ or } \frac{\ln 6340}{\ln 3} \simeq 7,97$

Donc, dans $\mathbb{N}$: **$n \geq 8$** à partir du rang 8

Corrigé Entraînement 4

1) a) $5 - \ln x \geq 3 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq e^2$ mais on doit avoir $x > 0$ Donc **$S =]0; e^2]$**

b) $15 - e^{x+2} < 10 \Leftrightarrow e^{x+2} > 5 \Leftrightarrow x+2 > \ln 5 \Leftrightarrow x > \ln 5 - 2 \Rightarrow S =]\ln 5 - 2; +\infty[$

c) $e^{3-2x} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{3-2x} < 1 \Leftrightarrow 3-2x < \ln 1 \Leftrightarrow 3-2x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \Rightarrow S = \left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$

2) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(5-2x) \geq 0$

$\Leftrightarrow 5-2x \geq 1 \Leftrightarrow 2x \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 2$

x	0	2	2,5
$h(x)$	+	0	-

$k(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1$
 $\Leftrightarrow x \geq e$

x	0	e	$+\infty$
$k(x)$		- 0	+

3) $10 \times 0,9^n + 250 < 252 \Leftrightarrow 10 \times 0,9^n < 2 \Leftrightarrow 0,9^n < 0,2 \Leftrightarrow n \ln 0,2 < \ln 0,9 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,2}{\ln 0,9}$

or $\frac{\ln 0,2}{\ln 0,9} \simeq 15,3$ Donc, dans $\mathbb{N}$: **$n \geq 16$**

Corrigé Entraînement 5

1) a) $2 - \ln(1+x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow \ln(x+1) \leq 2$
 $\Leftrightarrow x+1 \leq e^2$
 $\Leftrightarrow x \leq e^2 - 1$ mais $x > -1$

$$S =] -1; e^2 - 1]$$

b) $\frac{2e^x - 1}{3} \leq 1$
 $\Leftrightarrow 2e^x - 1 \leq 3$
 $\Leftrightarrow e^x \leq 2$
 $\Leftrightarrow x \leq \ln 2$

$$S =] -\infty; \ln 2]$$

c) $2 - e^{-4x} \leq 0$
 $\Leftrightarrow e^{-4x} \geq 2$
 $\Leftrightarrow -4x \geq \ln 2$
 $\Leftrightarrow x \leq -\frac{\ln 2}{4}$ avec $-\frac{\ln 2}{4} \simeq -0,17$

Donc sur $[-1; 1]$ $S = \left[-1; -\frac{\ln 2}{4}\right]$

2) a) $\phi(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 + \ln(2x-4) \geq 0$

$\Leftrightarrow \ln(2x-4) \geq -2 \Leftrightarrow 2x-4 \geq e^{-2}$
 $\Leftrightarrow x \geq \frac{e^{-2}+4}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2e^2} + 2$

x	2	$\frac{1}{2e^2} + 2$	5
$\phi(x)$		-	0 +

b) Pour f , il faut faire un tableau de signe, donc connaître le signe du logarithme

$\ln(4-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 4-x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq 3$
 $\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

x	-2	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	2				
x	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$		
$\ln(4-x^2)$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $
$f(x)$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $

3) (u_n) est croissante donc on cherche $u_n \geq 100$

$102 - 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 100 \Leftrightarrow 102 - 100 \geq 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{2}{48} \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{24}\right)$

$\Leftrightarrow -n \ln 2 \leq -\ln 24 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 24}{\ln 2}$ or $\frac{\ln 24}{\ln 2} \simeq 4,6$ Donc $n \geq 5$ à partir du rang 5