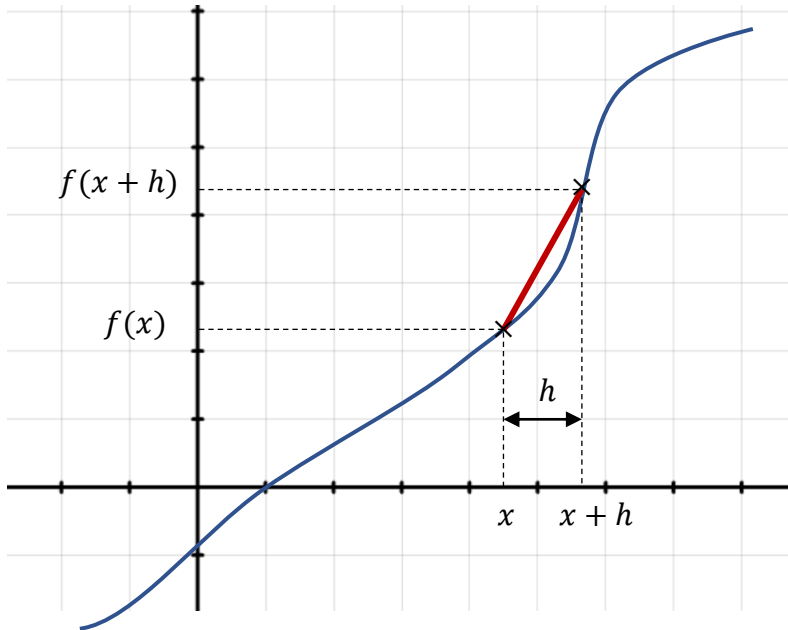


Df. 3 – Démonstrations

• Taux de variation et dérivée



Les abscisses varient de x à $x + h$ (donc de h)
Les ordonnées varient de $f(x)$ à $f(x + h)$

Le taux d'accroissement de la fonction (c'est-à-dire le coefficient directeur de la « corde ») est donc de :

$$\tau = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Si $\tau > 0$ alors $f(x + h) > f(x)$ et la fonction f est croissante entre x et $x + h$

Si $\tau < 0$ alors $f(x + h) < f(x)$ et la fonction f est décroissante entre x et $x + h$

Quand on fait « tendre h vers 0 », c'est-à-dire quand le 2^{ème} point se rapproche du 1^{er}, le taux de variation décrit de mieux en mieux ce qui se passe au voisinage de x .

On dit qu'on calcule la « limite » du taux quand « h tend vers 0 ». Si cette limite « existe », on l'appelle la dérivée de f en x et on note :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

• Détermination de la dérivée de $f(x) = x^2$

On a $f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$ donc pour calculer le taux :

$$\tau = \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \quad \Rightarrow \text{La dérivée de } x^2 \text{ est } 2x$$

• Détermination de la dérivée de $f(x) = \frac{1}{x}$

On calcule le taux :

$$\tau = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) \times \frac{1}{h} = \left(\frac{x}{x(x+h)} - \frac{1(x+h)}{x(x+h)} \right) \times \frac{1}{h} = \frac{x - x - h}{x(x+h)} \times \frac{1}{h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x(x+h)} \right) = \frac{-1}{x \times x} \quad \Rightarrow \text{La dérivée de } \frac{1}{x} \text{ est } -\frac{1}{x^2}$$