

CORRECTIONS Entraînement bac - Suites et inégalités

Corrigé Exercice n°1

Partie A

$$f'(x) = 1e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$$

x	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	0 -	
e^{-x}	+	+	
$f'(x)$	+	0 -	
$f(x)$	0 ↗	$\frac{1}{e}$ ↘	

Partie B

1. Attention, comme le repère n'est pas orthonormé, la première bissectrice (Δ) n'est pas habituelle.

2. Initialisation : Pour $n = 0$,
 $u_0 = 1 > 0$

Donc $u_n > 0$ est vraie pour $n = 0$

Hérédité : Si $u_n > 0$ est vraie pour $n = p$ alors on a : $u_p > 0$.

Or $e^{-u_p} > 0$ car une exponentielle est toujours positive. Donc $u_{p+1} = u_p \times e^{-u_p} > 0$

Donc $u_n > 0$ est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout nombre entier n , on a bien $u_n > 0$.

3. Vous pouvez refaire une récurrence, mais la démonstration directe est assez évidente :

Comme $u_n > 0$, alors $-u_n < 0$ et la fonction exponentielle étant croissante, $e^{-u_n} < e^0 \Leftrightarrow e^{-u_n} < 1$
 $\Leftrightarrow u_n e^{-u_n} < u_n$ (encore une fois, u_n est positif) et donc $u_{n+1} < u_n$

La suite (u_n) est décroissante.

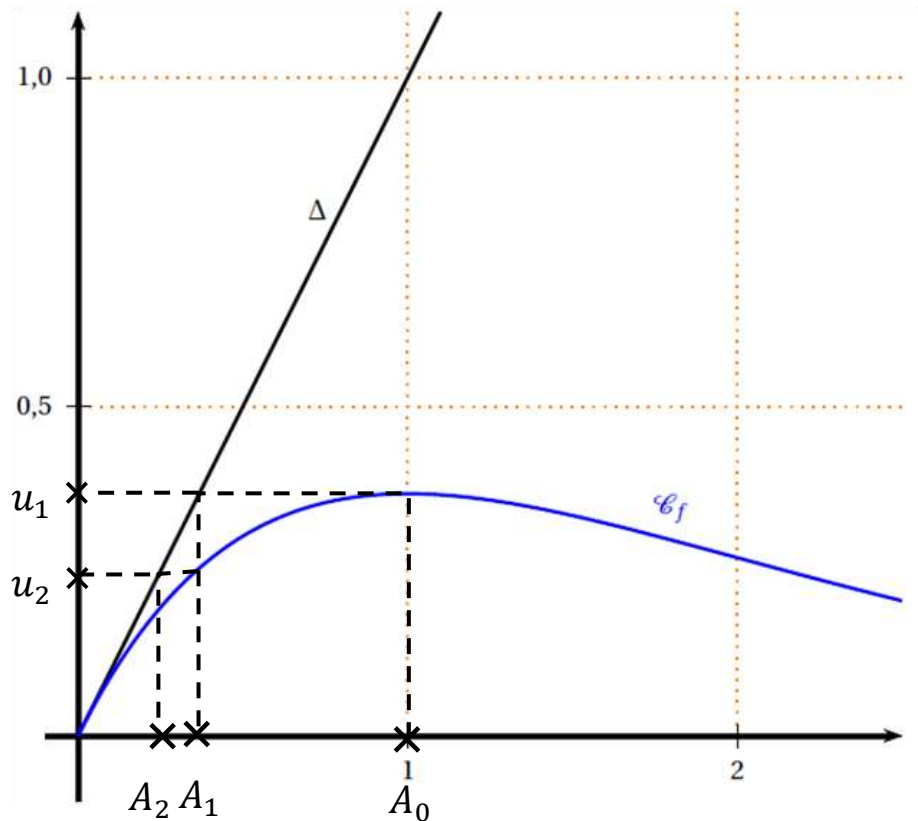
4. a. La suite (u_n) est décroissante (question 3) et minorée par 0 (question 2) : d'après le théorème des suites monotones bornées, **elle est convergente.**

b. $xe^{-x} = x \Leftrightarrow x(e^{-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 0$

Donc la limite de (u_n) est 0

Partie C

```
u = 1
S = 1
for k in range(100) :
    u = u*exp(-u)
    S = S + u
print(S)
```



Corrigé Exercice n°2

1. Il semble que $\frac{4}{u_n} = 4 + n$

2. **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ donc on a bien $u_0 > 0$: la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier p pour lequel la propriété est vraie,

donc on a : $u_p > 0 \Rightarrow 4u_p > 0$ mais aussi $u_p + 4 > 4 > 0$

donc, comme quotient de deux nombre strictement positifs, on a $\frac{4u_p}{u_p+4} > 0$, c'est-à-dire $u_{p+1} > 0$

La propriété est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien $u_n > 0$

3. 1^{ère} méthode : démonstration directe

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 4} - u_n = \frac{4u_n - u_n(u_n + 4)}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2}{u_n + 4}$$

Or, comme $u_n > 0$, on a $u_n + 4 > 4 > 0$ et donc $u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$

La suite (u_n) est bien décroissante.

2^{ème} méthode : par récurrence

Soit la fonction de récurrence $f(x) = \frac{4x}{x+4}$ définie sur $]0; +\infty[$ (puisque'on sait que $u_n > 0$)

On a $f'(x) = \frac{4(x+4)-4x}{(x+4)^2} = \frac{16}{(x+4)^2} > 0$ donc f est croissante sur $]0; +\infty[$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{4}{5}$ on a bien $u_0 \geq u_1$: la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier p pour lequel la propriété est vraie, donc on a : $u_p \geq u_{p+1}$

La fonction de récurrence f est croissante, on a donc : $f(u_p) \geq f(u_{p+1})$

cela donne $u_{p+1} \geq u_{p+2}$ la propriété est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien $u_n \geq u_{n+1}$ et la suite (u_n) est bien décroissante

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro, donc, d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est **convergente vers une limite ℓ**

$$5. v_{n+1} = \frac{4}{u_{n+1}} = 4 \div \frac{4u_n}{u_n+4} = \frac{4(u_n+4)}{4u_n} = \frac{u_n+4}{u_n} = 1 + \frac{4}{u_n} = 1 + v_n$$

La suite (v_n) est bien arithmétique de raison 1 et de 1^{er} terme $v_0 = \frac{4}{u_0} = \frac{4}{1} = 4$

Donc $v_n = v_0 + nR = 4 + n$

$$6. \text{ On a donc } v_n = \frac{4}{u_n} = 4 + n \Leftrightarrow u_n = \frac{4}{4+n}$$

on a $\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + n = +\infty$ donc par quotient de limites : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{4+n} = 0$

Corrigé Exercice n°3

1. $u_1 = \frac{3u_0+2v_0}{5} = \frac{3 \times 16 + 2 \times 5}{5} = \frac{58}{5}$ et $v_1 = \frac{u_0+v_0}{2} = \frac{21}{2}$

2. a. $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3u_n+2v_n}{5} - \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{6u_n+4v_n-5u_n-5v_n}{10} = \frac{(u_n-v_n)}{10} = \frac{1}{10} w_n$

La suite (w_n) est bien géométrique de raison $\frac{1}{10} = 0,1$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 11$

On a alors $w_n = w_0 \times q^n = 11 \times 0,1^n$

b. La suite (w_n) est une suite de termes positifs

$\lim_{n \rightarrow \infty} 0,1^n = 0$ car $0,1 \in]-1; 1[$ donc par multiple de limites : $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$

3. a. $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2v_n}{5} - u_n = \frac{3u_n+2v_n-5u_n}{5} = \frac{-2u_n+2v_n}{5} = -\frac{2}{5}(u_n - v_n) = -0,4w_n$ CQFD

b. Comme on sait que $w_n > 0$, on a alors $-0,4w_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$
La suite (u_n) est bien **décroissante**.

c. **Initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 16$ donc on a bien $u_0 \geq 5$: la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier p pour lequel la propriété est vraie,

donc on a : $u_p \geq 5$ et $3u_p \geq 15$

Par ailleurs on a admis que $v_p \geq 5$ donc $2v_p \geq 10$

On a alors $\frac{3u_p+2v_p}{5} \geq \frac{15+10}{5}$ c'est-à-dire $u_{p+1} \geq 5$ La propriété est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien $u_n \geq 5$

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 5, donc, d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est **convergente**

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente.

On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n) .

4. a. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3u_n+2v_n}{5} = \frac{3\ell+2\ell'}{5} = \ell$

$\Leftrightarrow \frac{3\ell+2\ell'}{5} = \ell \Leftrightarrow 3\ell+2\ell' = 5\ell \Leftrightarrow 2\ell' = 2\ell \Leftrightarrow \ell' = \ell$

b. $c_{n+1} = 5u_{n+1} + 4v_{n+1} = 5 \times \frac{3u_n+2v_n}{5} + 4 \times \frac{u_n+v_n}{2} = 3u_n + 2v_n + 2u_n + 2v_n = 5u_n + 4v_n = c_n$

La suite (c_n) est bien **constante**

On a alors $c_n = c_0 = 5u_0 + 4v_0 = 5 \times 16 + 4 \times 5 = 100$

c. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 100$ mais aussi $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 5 \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \Leftrightarrow 5\ell + 4\ell' = 100$

et comme $\ell' = \ell$ on a $9\ell = 100 \Leftrightarrow \ell = \frac{100}{9}$

Corrigé Exercice n° 4

Corrigé Partie A

1. $u_1 = 0,9u_0(1 - u_0) = 0,9 \times 0,3 \times 0,7 = 0,189$ et $u_1 = 0,9 \times 0,189 \times 0,811 \approx 0,138$

Il y a 189 tortues au début de l'année 2001 puis 138 au début de l'année 2002.

2. a. Pas besoin de récurrence, démonstration directe avec l'information donnée dans l'énoncé

On sait que pour tout entier naturel n on a $0 \leq (1 - u_n) \leq 1$

donc, comme $0,9u_n \geq 0$ (puisque $u_n \geq 0$), on a $0 \leq 0,9u_n(1 - u_n) \leq 0,9u_n \Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$

b. Initialisation : $u_0 = 0,3$ et $0,3 \times 0,9^0 = 0,3$ Donc $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$ est vraie pour $n = 0$

Hérédité : Si $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$ est vraie pour $n = p$, on a $0 \leq u_p \leq 0,3 \times 0,9^p$

on a, d'après la question précédente : $0 \leq u_{p+1} \leq 0,9u_p$

$$0 \leq u_{p+1} \leq 0,9 \times 0,3 \times 0,9^p \Leftrightarrow 0 \leq u_{p+1} \leq 0,3 \times 0,9^{p+1}$$

Donc $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$ est vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$

c. Comme $0,9 \in]-1; 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3 \times 0,9^n = 0$

Comme $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$, en application du théorème des gendarmes, on $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Si l'évolution de cette population de tortues continue à suivre ce modèle, la population va s'éteindre.

3.

$$u = 0.3$$

$$n = 0$$

while u >= 30 :

$$n = n + 1$$

$$u = 0.9 * u * (1 - u)$$

print(n - 1)

Partie B

1. $v_{11} = 1,06v_{10}(1 - v_{10}) = 1,06 \times 0,032 \times 0,968 \approx 0,033$ et $v_{12} \approx 0,034$

Il y aura 33 tortues au début de l'année 2011 puis 34 au début de l'année 2012.

2. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \ell$ et, par somme de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - v_n) = 1 - \ell$

Donc, comme $v_{n+1} = 1,06v_n(1 - v_n)$, par produit de limites, on obtient : $\ell = 1,06\ell(1 - \ell)$.

3. On résout : $\ell = 1,06\ell(1 - \ell) \Leftrightarrow \ell = 1,06\ell - 1,06\ell^2 \Leftrightarrow 0,06\ell - 1,06\ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell(0,06 - 1,06\ell) = 0$
 $\Leftrightarrow \ell = 0$ ou $0,06 - 1,06\ell = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $\ell = \frac{0,06}{1,06} \approx 0,057$

Or, la suite est croissante, donc $v_{10} \leq v_n \leq \ell$ Donc on doit avoir $\ell \geq 0,32$: la valeur $\ell = 0$ ne convient pas.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \approx 0,57 \Rightarrow$ L'espèce n'est plus menacée.

Autre méthode : La suite (v_n) est croissante, on a donc $v_n \geq v_{10}$ c'est-à-dire $v_n \geq 0,32$

La population de tortue n'est plus menacée.