

Correction sujet n°2

Corrigé EXERCICE 1

Question 1. Réponse **A** on factorise : $u_n = \frac{n^4+n}{-3+n} = \frac{n^4(1+\frac{1}{n^3})}{n(-\frac{3}{n}+1)} = \frac{n^3(1+\frac{1}{n^3})}{-\frac{3}{n}+1}$

Question 2. Réponse **B**

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ si coplanaires, $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ on résout $\begin{cases} 3x + 3y = -4 \\ -x + y = 2 \\ 4x + 5y = -5 \end{cases}$

et on a trouvé une solution $x = -\frac{5}{3}$; $y = \frac{1}{3}$

Question 3. Réponse **B** $1 - x > 2x^2 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 < 0$ avec $\Delta = 9$, $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$
du signe de a (positif) à l'extérieur des racines

Question 4. Réponse **C**

Et à partir de la tangente en A, on a $f'(5) = 1$

x	0	$\simeq -2,5$	$\simeq 7,5$	10	
Variations f		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
Signe f'	$-$	0	$+$	0	$-$

Corrigé EXERCICE 2

1. a. $u_1 = 10 \times (1 - 0,2) + 1 = 8 + 1 = 9$ Au bout d'une minute, il reste 9 mL de médicament dans le sang

$u_2 = 9 \times 0,8 + 1 = 8,2$ Au bout de deux minutes, il en reste 8,2 mL 0,75

b. On a 20 % du produit est éliminé au bout d'une minute, donc on multiplie par $1 - \frac{20}{100} = 0,8$, soit $0,8u_n$ puis on rajoute 1 mL de produit : on a bien : $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$. 0,25

c. À la calculatrice, on trouve $u_7 \simeq 6,05$ et $u_8 \simeq 5,84$
Donc le médicament passe en dessous de 6 mL entre 7 et 8 minutes 1

2. a. $w_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 0,8u_n + 1 - 5 = 0,8(w_n + 5) - 4 = 0,8w_n + 4 - 4$
 $w_{n+1} = 0,8w_n$ Donc la suite (w_n) est géométrique de raison 0,8 1,5
Et son 1^{er} terme est : $w_0 = u_0 - 5 = 5$

b. On a $w_n = w_0 \times q^n = 5 \times 0,8^n$ et $u_n = w_n + 5 = 5 \times 0,8^n + 5 = 5(0,8^n + 1)$ CQFD 0,5

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,8^n = 0$ car $0,8 \in]-1; 1[$ Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 5 \times (0 + 1) = 5$ 1

Au bout d'un grand nombre de minutes, la quantité de médicament va se stabiliser vers 5 mL

Corrigé EXERCICE 3

1. Voir figure ci-contre

2. a. $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} x_n - x_M \\ y_n - y_M \\ z_n - z_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ \frac{1}{2} - 1 \\ 1 - \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 0 - 1 \\ -\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

On a $\frac{x_{\overrightarrow{MP}}}{x_{\overrightarrow{MN}}} = \frac{0}{-1} = 0$ et $\frac{y_{\overrightarrow{MP}}}{y_{\overrightarrow{MN}}} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2 \neq \frac{x_{\overrightarrow{MN}}}{x_{\overrightarrow{MP}}}$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont pas colinéaires, donc les points M, N et P ne sont pas alignés.

b. $MN = \sqrt{(x_n - x_M)^2 + (y_n - y_M)^2 + (z_n - z_M)^2}$
 $= \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}}$
 $= \sqrt{\frac{21}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_P}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \\ z_I = \frac{z_M + z_P}{2} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{4}}{2} = -\frac{2}{4} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Donc $I \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right)$

3. a. Le plan (MNP) passe par $M \left(1; 1; \frac{3}{4} \right)$ et a comme vecteurs directeurs $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Donc une représentation paramétrique du plan (MNP) est $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t - t' \\ z = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t - 2t' \end{cases}, t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$

b. On teste les coordonnées du point $C(0; 0; 0)$:

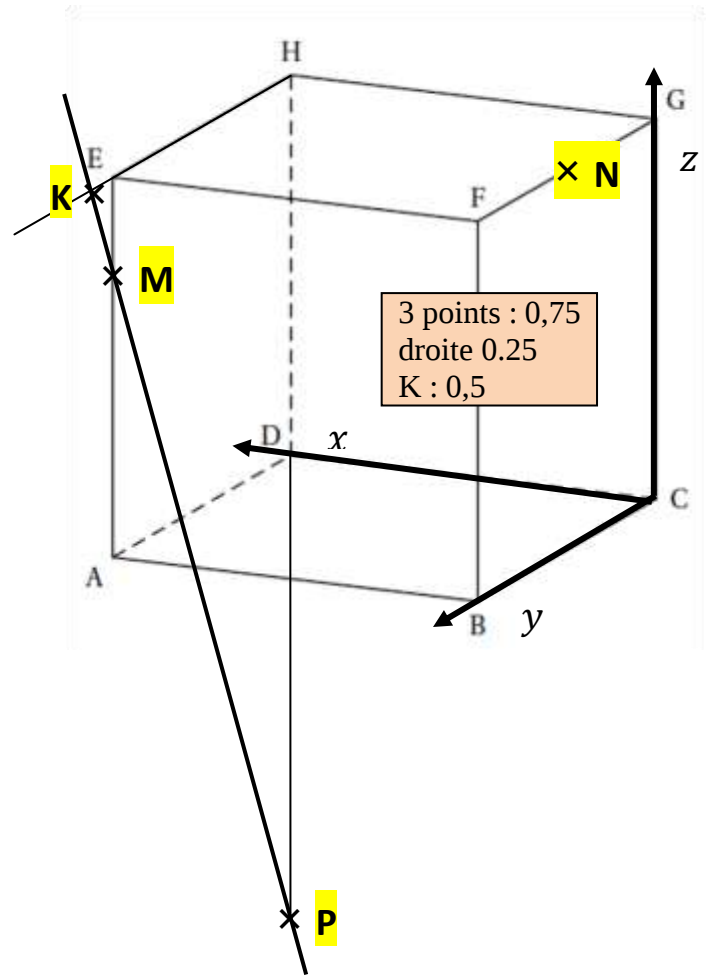
$$\begin{cases} 0 = 1 - t \\ 0 = 1 - \frac{1}{2}t - t' \\ 0 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ 0 = 1 - \frac{1}{2} - t' \\ 0 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 1 - \frac{1}{2} \\ 2t' = \frac{4}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = \frac{1}{2} \\ t' = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le système a une solution, donc $C \in (MNP)$

4. a. Les plans (MNP) et (HED) se coupent le long de la droite (MP). Voir figure

b. Voir figure

0,5
+ points figure



Corrigé EXERCICE 4

Partie A

1. $g(-1) = 1 - 1e^{-(-1)} = 1 - e$ et de $g(1) = 1 + e^{-1} = 1 + \frac{1}{e}$ 0,5

2. a. $g'(x) = 0 + 1e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$. 0,75

b.

0,75				
0,75				

3. a. Sur $[1; 5]$, la fonction g est strictement positive, donc l'équation $g(x) = 0$ n'y a pas de solution

1

Sur $[-1; 1]$, g est continue et strictement croissante, avec $1 - e < 0 < 1 + e^{-1}$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-1; 1]$, et donc sur $[-1; 5]$

b. $-0,6 < \alpha < -0,5$ 0,5

c.

4. On a $g(0) = 1$ et $g'(0) = 1e^0 = 1$ donc une équation de la tangente T est : $y = x + 1$ 0,75

Partie B

BONUS

+1

1.

$$g'_n(x) = e^{-nx} + x(-ne^{-nx}) = (1 - nx)e^{-nx} \text{ avec } 1 - nx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{n}$$

2. Le maximum de g_n sur l'intervalle $[-1; 1]$ est $g_n\left(\frac{1}{n}\right) = n + \frac{1}{n}e^{-1}$

3. Sur $[-1; 1]$, g_n est continue et strictement croissante, avec $n - e^n < 0 < n + \frac{1}{n}e^{-1}$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n sur $[-1; 1]$.