

Sujets bac

Suites et intégrales

Vrai-faux : Extraits

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$v_n = \int_1^n \ln x \, dx.$$

Affirmation 1 : La suite (v_n) est croissante.

2. On considère la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par

$$I_n = \int_1^e [\ln(x)]^n \, dx.$$

Affirmation 2 : Pour tout entier naturel n , $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

Extrait 1 : AN 2 (secours) 2025

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^{-x} + 2x - 1.$$

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ délimité par la courbe C_f , la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

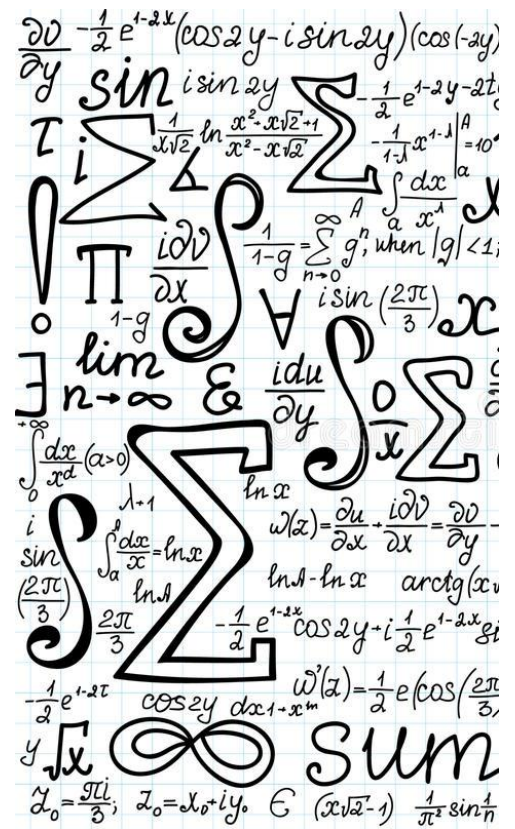
On note

$$I_n = \int_1^n x e^{-x} \, dx$$

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n .

2. a. Justifier que l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ est I_n .

b. Calculer la limite de l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ quand n tend vers $+\infty$.



Sujet 1 : Nouvelle Calédonie 1 - nov 2025

On considère n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_n(x) = x^n e^{1-x}$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0 ; 1]$ et on note f'_n sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.

On étudie donc la fonction f_1 définie sur $[0 ; 1]$ par : $f_1(x) = x e^{1-x}$.

1. Montrer que $f'_1(x)$ est strictement positive pour tout réel x de $[0 ; 1[$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

On admet que $u_1 = e - 2$.

1. a. Justifier que pour tout $x \in [0 ; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$
b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$
c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$$

b. On considère le script Python ci-contre définissant la fonction suite () :

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction suite (n) renvoie la valeur de

$$\int_0^1 x^n e^{1-x} dx$$

```
from math import exp

def suite():
    u = ...
    for n in range (1, ...):
        u = ...
    return
```

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leq \frac{e}{n+1}$$

- b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Sujet 2 : Amérique du Nord 1 – juin 24

Pour tout entier naturel n , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) dx \quad , \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) dx$$

1. Calculer I_0 .

2. a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $I_n \geq 0$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

c. Dédire des deux questions précédentes que la suite (I_n) converge.

3. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^\pi e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}$$

c. Dédire des deux questions précédentes la limite de la suite (I_n) .

4. a. En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$

5. On souhaite obtenir le rang n à partir duquel la suite (I_n) devient inférieure à 0,1.

Recopier et compléter la cinquième ligne du script Python ci-dessous avec la commande appropriée.

```
1 from math import *
2 def seuil() :
3     n = 0
4     I = 2
5     ...
6     n = n+1
7     I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
8     return n
```