

Corrigé Sujet n°1

1. $\Rightarrow$

2. $p(B \cap S) = p(B) \times p_B(S) = 0,15 \times 0,8 = 0,12$

Donc, il y a bien 12 % de chances que la connexion soit stable et passe par le serveur B.

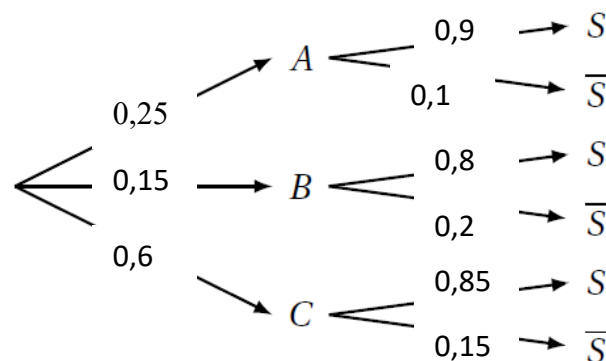
3. $p(C \cap \bar{S}) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$

Donc, il y a 9 % de chances que la connexion ne soit pas stable et passe par le serveur C.

4. $P(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S)$
 $= 0,25 \times 0,9 + 0,12 + 0,6 \times 0,85 = 0,855$

5. $p_S(B) = \frac{p(B \cap S)}{p(S)} = \frac{0,12}{0,855} \simeq 0,140$

Si la connexion est stable, il y a alors environ 14 % de chances que la connexion ait eu lieu du serveur B.



Partie B

1. a. Il y a 50 connexions, donc $n = 50$ et chacune a la probabilité d'être instable : $p = 0,145$
 $X \hookrightarrow \mathcal{B}(50; 0,145)$

b. $p(X \leq 8) \simeq 0,704$ Il y a environ 70 % de chances qu'au plus huit connexions soient instables.

2. a. $p_n = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0,145^0 \times 0,855^n = 1 - 0,855^n$

b. $p_n \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,855^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,855^n \leq 1 - 0,99 \Leftrightarrow 0,855^n \leq 0,01$

En passant au logarithme $\Leftrightarrow \ln(0,855^n) \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \ln 0,855 \leq \ln 0,01$

Comme $\ln 0,855 \leq 0 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,855}$

Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,855} \simeq 29,4$ mais comme n est un entier, on en déduit $n \geq 30$

C'est pour un échantillon de 30 connexions que la probabilité d'avoir au moins une connexion instable dépasse les 99%

3. a. On a : $E(F_n) = \frac{1}{n} E(X_n) = \frac{1}{n} \times np = p = 0,145$

b. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $P(|F_n - E(F_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(F_n)}{\delta^2}$ pour $\delta = 0,1$

Soit $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{\frac{0,123975}{n}}{0,1^2} \Leftrightarrow P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{0,123975}{0,01n}$

Or $\frac{0,123975}{0,01} = 12,3975 < 12,5$ donc on a bien, par élargissement, $P(|F_n - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{n}$

c. On a un écart à la moyenne de $F_{1000} - 0,145 = 0,3 - 0,145 = 0,155 \geq 0,1$

D'après la question précédente, $P(|F_{1000} - 0,145| \geq 0,1) \leq \frac{12,5}{1000}$

Il y a donc une probabilité inférieure à 1,25 % de constater un écart à la moyenne supérieur au dixième : c'est une probabilité très faible qui oriente vers un dysfonctionnement des serveurs, sans néanmoins écarter l'aléa statistique.