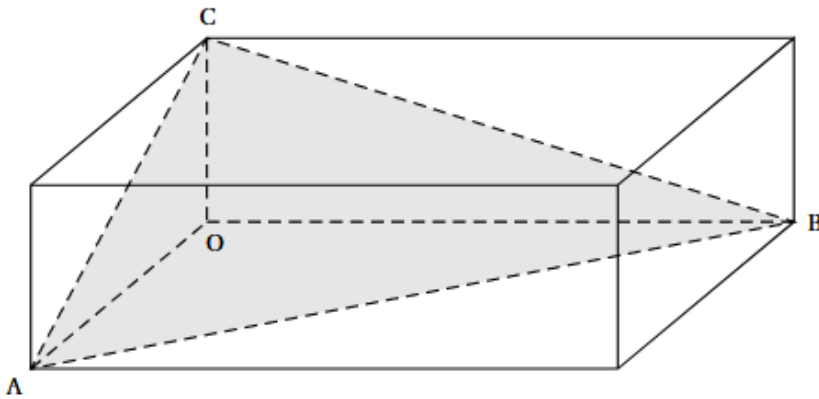


# Sujet d'entraînement n°3

## Exercice 9

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points :  
 $A$  de coordonnées  $(2; 0; 0)$ ,  $B$  de coordonnées  $(0; 3; 0)$  et  $C$  de coordonnées  $(0; 0; 1)$ .



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

1. a. Montrer que le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$  est normal au plan  $(ABC)$ .  
b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan  $(ABC)$  est :  $3x + 2y + 6z - 6 = 0$ .
2. On note  $d$  la droite passant par  $O$  et orthogonale au plan  $(ABC)$ .  
a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $d$ .  
b. Montrer que la droite  $d$  coupe le plan  $(ABC)$  au point  $H$  de coordonnées  $\left(\frac{18}{49}; \frac{12}{49}; \frac{36}{49}\right)$ .  
c. Calculer la distance  $OH$ .
3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par :  $V = \frac{1}{3} Bh$ , où  $B$  est l'aire d'une base et  $h$  est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.  
En calculant de deux façons différentes le volume de la pyramide  $OABC$ , déterminer l'aire du triangle  $ABC$

## Exercice 10

Un test est mis au point pour détecter une maladie dans un pays.  
Selon les autorités sanitaires de ce pays, 7 % des habitants sont infectés par cette maladie.  
Parmi les individus infectés, 20 % sont déclarés négatifs.  
Parmi les individus sains, 1 % sont déclarés positifs.

Une personne est choisie au hasard dans la population.

On note :

- $M$  l'évènement : « la personne est infectée par la maladie » ;
- $T$  l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.
2. a. Quelle est la probabilité pour que la personne soit infectée par la maladie et que son test soit positif ?  
b. Montrer que la probabilité que son test soit positif est de 0,0653.

3. On sait que le test de la personne choisie est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit infectée ?  
On donnera le résultat sous forme approchée à  $10^{-2}$  près.

4. On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note  $X$  la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'individus ayant un test positif parmi les dix personnes.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par  $X$  ? Préciser ses paramètres.

b. Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif.

On donnera le résultat sous forme approchée à  $10^{-2}$  près.

5. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait un test positif, soit supérieure à 99 %.

## Exercice 11

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

### Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.

L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite  $(v_n)$  où  $v_n$  représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en  $2016 + n$ . On a donc  $v_0 = 12$ .

1. Déterminer la nature de la suite  $(v_n)$  et donner l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

### Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 12$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$ .

1. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x$ .

a. Justifier que  $g$  est croissante sur  $[0 ; 60]$ .

b. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $g(x) = x$ .

2. On remarquera que  $u_{n+1} = g(u_n)$ .

a. Calculer la valeur arrondie à  $10^{-3}$  de  $u_1$ . Interpréter.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq u_n \leq 55$ .

c. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

d. En déduire la convergence de la suite  $(u_n)$ .

e. On admet que la limite  $\ell$  de la suite  $(u_n)$  vérifie  $g(\ell) = \ell$ .

En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle. Il utilise l'algorithme ci-contre.

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier  $r$  tel que  $u_r \geq 50$ .

```

n = 0
u = 12
WHILE ...
    u = ...
    n = ...
Return ...

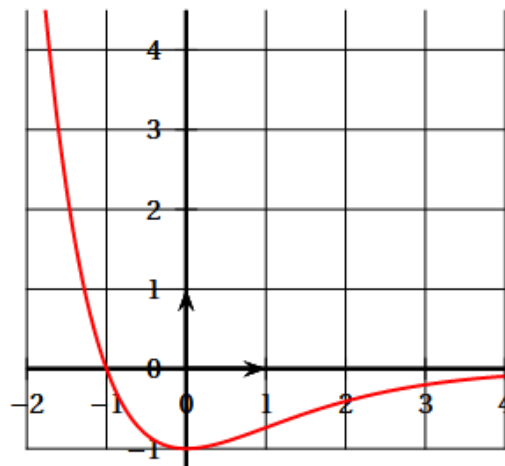
```

## Exercice 12

### Partie 1

On donne ci-contre, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée  $f'$  d'une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. La convexité de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .



Courbe représentant la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .

### Partie 2

On admet que la fonction  $f$  mentionnée dans la **Partie 1** est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}$$

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $f'$  et  $f''$  les fonctions dérivées première et seconde de  $f$  respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  :  $f(x) = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$

En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

Justifier que la courbe  $\mathcal{C}$  admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

2. a. Montrer que, pour tout nombre réel  $x$  :  $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$

b. Étudier les variations sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution  $\alpha$  sur l'intervalle  $[-2; -1]$  dont on donnera une valeur approchée à  $10^{-1}$  près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel  $x$ , l'expression de  $f''(x)$  et étudier la convexité de la fonction  $f$ .  
Que représente pour la courbe  $\mathcal{C}$  son point  $A$  d'abscisse 0 ?