

Corrigé Exercice 15

- 1) a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ et $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BF})$ (ou $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF})$, $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BF})$...)
 b) $(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HF})$ et $(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{GE})$ etc.
 c) $(\overrightarrow{EK}, \overrightarrow{EJ})$ et $(\overrightarrow{EH}, \overrightarrow{KJ})$ etc.
 d) $(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{DI})$ et $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{MI})$ etc.

2) a) J n'appartient pas à la droite (DM) donc les points **D, M et J ne sont pas alignés et forment un plan**

b) Les points M, I et H ne sont pas alignés, donc ils forment un plan de l'espace.

De plus le point C n'appartient pas au plan (MIH), donc **les points M, I, C, H ne sont pas coplanaires et $(M; \overrightarrow{MI}; \overrightarrow{MH}; \overrightarrow{MC})$ est bien un repère de l'espace**

c) $I \in [AB] \Rightarrow I \in (ABC)$. De même D est dans la face $ABCD$ donc $D \in (ABC)$.

Les points D, I et C sont donc dans (ABC) donc les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont dans la direction de (ABC) . Enfin **ils ne sont pas colinéaires**, donc ils forment une base du plan (ABC) .

d) On a bien sûr : $C \in (EHC)$ $(EH) \parallel (BC)$ donc $H \in (EHC)$ et $K \in (EH) \Rightarrow K \in (EHC)$.

Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont dans la direction du plan (EHC) .

Enfin **ils ne sont pas colinéaires**, donc ils sont effectivement des vecteurs directeurs de (EHC) .

Corrigé Exercice 16

$$1) a) \vec{a} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 7 - 5 \\ 4 + 8 - 12 \\ 6 - 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

On a donc $2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$ Donc les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ **sont coplanaires**

2) a) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne peuvent pas être proportionnelles ($z_{\vec{b}} = 0$ alors que $z_{\vec{a}} \neq 0$)

$$b) \text{ On cherche à résoudre le système } \vec{c} = t\vec{a} + \theta\vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4t - 2\theta \\ 4 = -t + 2\theta \\ 6 = 3t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 8 - 2\theta \\ 4 = -2 + 2\theta \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = 3 \\ \theta = 3 \\ t = 2 \end{cases} \text{ On a donc } \vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \Rightarrow \text{Les vecteurs } \vec{a}, \vec{b} \text{ et } \vec{c} \text{ sont coplanaires}$$

$$3) a) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ or a } \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} = -\frac{2}{3} ; \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}} = 0 \neq -\frac{2}{3}$$

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires : les points A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un plan.

$$b) 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 3 - 7 \\ 0 + 2 - 2 \\ 2 - 2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Donc $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ Les vecteurs sont coplanaires et donc **les points A, B, C et D sont coplanaires**

4) a) $\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ or a $\frac{x_{\overrightarrow{MP}}}{x_{\overrightarrow{MN}}} = 0$; $\frac{y_{\overrightarrow{MP}}}{y_{\overrightarrow{MN}}} = 1 \neq 0$

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires : les points M, N et P ne sont pas alignés et forment donc un plan.

b) On a $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ On a donc $\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{QR}$

Les vecteurs sont coplanaires

c) La droite (QR) est parallèle au plan (MNP) (soit strictement parallèle, soit incluse)

5) a) Attention : 2 étapes ! d'abord montrer que 3 des points ne sont pas alignés et donc forment un plan ; ensuite démontrer que le 4^{ème} point est coplanaire

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ or a $\frac{x_{\overrightarrow{AD}}}{x_{\overrightarrow{AB}}} = 0$; $\frac{y_{\overrightarrow{AD}}}{y_{\overrightarrow{AB}}} = 1 \neq 0$

Donc les vecteurs ne sont pas colinéaires : les points **A, B et D ne sont pas alignés et forment donc un plan.**

$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ et on cherche x et y tels que $\overrightarrow{AE} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x = -3 \\ 3x + 3y = 3 \\ -4x - 4y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 6 + 3y = 3 \\ -8 - 4y = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ y = +1 \end{cases}$

Donc le système n'a pas de solution, les vecteurs ne sont PAS coplanaires et par conséquent, **les points A, B, D et E ne sont pas coplanaires** (ou E n'appartient pas au plan (ABD))

b) $\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et on cherche x et y tels que $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2}x = 3 \\ 3x + 3y = 3 \\ -4x - 4y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ -6 + 3y = 3 \\ 8 - 4y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ y = 3 \end{cases}$ On a $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD}$

Les vecteurs sont coplanaires, donc les points A, B, D et F aussi : **le point F appartient au plan (ABD)**

Corrigé Exercice 17

1) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}$

Donc $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DH} - \frac{1}{2}\overrightarrow{FD} \Rightarrow$ **Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont coplanaires.**

2) $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$

On a donc $\overrightarrow{AF} = -2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ **les vecteurs $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.**

3) $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires, donc les points A, B, C et M sont coplanaires, et **le point M appartient au plan (ABC)**