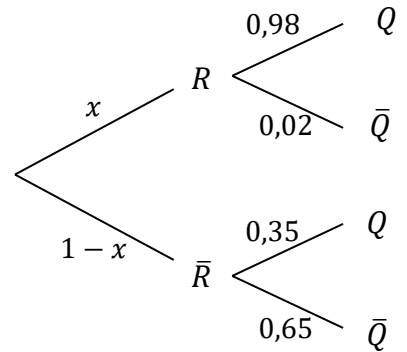


Corrigé métropole 2 – Juin 2024

Corrigé Exercice 1



1. $P(Q) = 0,917$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0,65$.

2. a. $\Rightarrow$

b. On a $p(Q) = p(R \cap Q) + p(\bar{R} \cap Q) = x \times 0,98 + (1 - x) \times 0,35$

et on sait que $P(Q) = 0,917$

On résout : $0,98x + 0,35(1 - x) = 0,917 \Leftrightarrow 0,98x - 0,35x = 0,917 - 0,35 \Leftrightarrow 0,63x = 0,567$

$\Leftrightarrow x = \frac{0,567}{0,63} = 0,9$ CQFD

3. $p_Q(R) = \frac{p(R \cap Q)}{p(Q)} = \frac{0,98 \times 0,9}{0,917} \simeq 0,962$

S'il a répondu « oui », il y a alors environ 96 de chances qu'il ait réussi l'examen.

4. On cherche la note k telle que $p(N \geq k) \geq 0,65 \Leftrightarrow 1 - p(N \leq k - 1) \geq 0,65$

A la calculatrice, en prenant comme fonction « 1-binomiale(X-1 ; 20 ; 0,615) » on trouve :

Pour $k = 11$, $p(N \geq k) \simeq 0,797$ et pour $k = 12$, $p(N \geq k) \simeq 0,649$

Donc il faut qu'elle récompense les étudiants qui ont plus de 12

5. On a $E(N) = np = 20 \times 0,615 = 12,3$

Donc $E(S) = E(N_1) + E(N_2) + \dots + E(N_{10}) = 10 \times E(N) = 10 \times 12,3 = 123$

On a et $V(N) = np(1 - p) = 20 \times 0,615 \times 0,385 = 4,7355$

Les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ sont indépendantes, donc :

$V(S) = V(N_1) + V(N_2) + \dots + V(N_{10}) = 10 \times V(N) = 47,355$

6. a. C'est la **note moyenne espérée sur un échantillon de 10 copies.**

b. $E(M) = E\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{10}E(S) = 12,3$ et $V(M) = V\left(\frac{S}{10}\right) = \frac{1}{100}V(S) = 0,47355$ CQFD

c. L'évènement $(10,3 < M < 14,3)$ correspond à l'évènement $(|M - 12,3| < 2)$ c'est-à-dire l'évènement contraire de $(|M - 12,3| \geq 2)$

On applique donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $p(|M - E(M)| \geq \delta) \leq \frac{V(M)}{\delta^2}$ pour $\delta = 2$

Soit : $p(|M - 12,3| \geq 2) \leq \frac{0,47355}{4}$

On a alors $p(|M - 12,3| < 2) \geq 1 - \frac{0,47355}{4} \Leftrightarrow p(|M - 12,3| < 2) \geq 0,8816125$

Par élargissement $p(|M - 12,3| < 2) \geq 0,80$

Il y a bien plus de 80% de chance que la note moyenne soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3

Corrigé Exercice 2

Partie A

1. La piscine contient 50 000 L d'eau, en rajoutant 15 000 mg de chlore, on fait donc augmenter le taux de $\frac{15000}{50000} = 0,3 \text{ mg.L}^{-1}$

2. a.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $v_0 = 0,7$ et $v_1 = 0,92 \times 0,7 + 0,3 = 0,944$ avec $0,7 \leq 0,944 \leq 4$ donc on a bien $v_0 \leq v_1 \leq 4$: la propriété est vraie au rang 0

Hérédité : Pour un p entier, on suppose que $v_p \leq v_{p+1} \leq 4$.

Alors $0,92v_p \leq 0,92v_{p+1} \leq 3,68$ puis $0,92v_p + 0,3 \leq 0,92v_{p+1} + 0,3 \leq 3,98$

On a donc $v_{p+1} \leq v_{p+2} \leq 3,98 < 4$ et par élargissement $v_{p+1} \leq v_{p+2} \leq 4$

La propriété est vraie pour $p + 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n , on a bien : $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

b. On a $v_n \leq v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante et $v_n \leq 4$, elle est aussi majorée par 4 : d'après le théorème des suites monotones bornées, la suite (v_n) est convergente.

On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$ Alors on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n+1} = \ell$, c'est-à-dire, par composée de limite :

$$0,92\ell + 0,3 = \ell \Leftrightarrow 0,08\ell = 0,3 \Leftrightarrow \ell = \frac{0,3}{0,08} = 3,75$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3,75$

3. À long terme, selon ce modèle, le taux de chlore se stabiliserait à $3,75 \text{ mg.L}^{-1}$, ce qui serait supérieur à la préconisation des piscinistes où la concentration doit rester inférieure à 3.

4. While $v \leq s$

$n = n + 1$

$v = 0,92v + 0,3$

5. On cherche la valeur de n à partir de laquelle $v_n > 3$: à la calculatrice, on a $v_{16} \simeq 2,94$ et $v_{17} \simeq 3,01$. Donc l'algorithme renvoie la **valeur 17**

17 jours à partir du 20 juin, le taux de chlore dépassera les préconisations des piscinistes.

Partie B

1. Les solutions des équations différentielles du type $y' = ay + b$ sont de la forme $Ce^{-ax} - \frac{b}{a}$, avec

$C \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire, avec $a = -0,08$ et $b = \frac{q}{50}$ donc $-\frac{b}{a} = -\frac{q}{50} \times \frac{1}{-0,08} = \frac{12,5q}{50} = \frac{q}{4}$

On obtient bien les fonctions f de la forme $f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}$ avec $C \in \mathbb{R}$

2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,08x = -\infty$ donc par composée de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-0,08x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{q}{4}$

b. On cherche q tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{q}{4} = 2 \Leftrightarrow q = 8$

Il lui faudra ajouter 8 g de chlore dans la piscine

On a $f(0) = 0,7 \Leftrightarrow Ce^0 + \frac{8}{4} = 0,7 \Leftrightarrow C = 0,7 - 2 = -1,3$

Soit la fonction $f(x) = -1,3e^{-0,08x} + 2$

Corrigé Exercice 3

Partie A

1. $f(-1) = -2$ et $f'(-1) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1}{1} = 1$

2. La courbe n'est pas entièrement au-dessus de la tangente T donc **elle ne peut pas être convexe** sur tout son ensemble de définition.

3. L'équation $f(x) = 0$ semble n'avoir qu'une seule solution $\alpha \simeq 0,1$.

Partie B

1. On a $\lim_{x \rightarrow -2^+} x + 2 = 0^+$ donc par composée de limites, $\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

De plus, comme $\lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 2x - 1 = -1$, on a, par somme de limites $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$

La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$

2. $f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+2} = \frac{2x^2 + 4x + 2x + 4 + 1}{x+2} = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x+2}$ CQFD

3. Pour $2x^2 + 6x + 5$, on a $\Delta = 36 - 40 = -4$ donc $2x^2 + 6x + 5$ est positif. $x + 2$ est aussi positif sur $] -2; +\infty[$, donc la dérivée est positive. On obtient donc :

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	$ -\infty$	$\nearrow +\infty$

4. f est continue et strictement croissante sur $] -2; +\infty[$ avec $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) < 0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -2; +\infty[$.

On observe que : $f(0,117) < 0 < f(0,118)$ donc $\alpha \simeq 0,12$.

5. On obtient donc :

x	-2	α	$+\infty$
$f(x)$	$ -$	0	$+$

6. On calcule : $f''(x) = \frac{(4x+6)(x+2) - (2x^2+6x+5)(1)}{(x+2)^2} = \frac{4x^2+14x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$

Pour $2x^2 + 8x + 7$, on a $\Delta = 64 - 56 = 8$ avec deux racines : $x_1 = \frac{-8+\sqrt{8}}{4}$ et $x_2 = \frac{-8-\sqrt{8}}{4}$.

Mais $x_2 \notin] -2; +\infty[$. Donc on obtient :

x	-2	x_1	$+\infty$
$f''(x)$	$ +$	0	$-$

Il y a donc un unique point d'inflexion en $x = \frac{-8+\sqrt{8}}{4} \left(= \frac{\sqrt{2}-4}{2} \right)$

Partie C

1. On a $x_M = x$ et $y_M = g(x) = \ln(x + 2)$ et $J(0; 1)$ donc $\overrightarrow{JM} \left(\ln(x + 2) - 1 \right)$.

On a donc $JM = \sqrt{x^2 + (\ln(x + 2) - 1)^2}$ et $JM^2 = x^2 + (\ln(x + 2) - 1)^2$

Donc $h(x) = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2$ CQFD

2. a. D'après les résultats de la partie B, on a :

x	-2	α	$+\infty$
$2f(x)$	$\parallel$	$-$	0
$x+2$	0	$+$	$+$
$h'(x)$	$\parallel$	$-$	0
$h(x)$	$\parallel$	$\searrow$	$\nearrow$

b. JM est minimale est α là où JM^2 est minimale. Vu que $h(x) = JM^2$, c'est donc en $x = \alpha$ en effet.

3. a. α est une solution de $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0$
 $\Rightarrow \ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$ CQFD.

b. Le coefficient directeur de la tangente est égal au nombre dérivé. On a donc $m_1 = g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$.

Le coefficient directeur de (JM_α) est : $m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(\alpha+2)-1}{\alpha}$.

On a donc : $m_2 = \frac{1-2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha} = -2 - \alpha = -(\alpha + 2)$.

Ainsi : $m_1 m_2 = \frac{1}{\alpha+2} \times (-(\alpha + 2)) = -1$

Donc la tangente est perpendiculaire à (JM_α) .

Corrigé Exercice 4

Affirmation 1 : VRAIE

ON a $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ on a $\frac{x_{AD}}{x_{AC}} = -1$ et $\frac{y_{AD}}{y_{AC}} = 0 \neq \frac{x_{AD}}{x_{AC}}$ les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc

les points ne sont pas alignés : ils forment bien un plan

On peut tester les 3 points : $8x_A - 5y_A + 4z_A - 16 = 8 \times 2 + 0 + 0 - 16 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}$

De même : $8 \times 4 - 5 \times 4 + 4 \times 1 - 16 = 32 - 20 + 4 - 16 = 0$ et $C \in \mathcal{P}$

Puis $0 + 0 + 4 \times 4 - 16 = 0$ et $D \in \mathcal{P}$

(Remarque, il y a d'autres démarches possibles : avec le vecteur normal de $\mathcal{P}$: $\vec{n} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, vérifier qu'il est orthogonal aux vecteurs directeurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ et tester seulement 1 point...)

Affirmation 2 : FAUSSE

On teste l'appartenance du point B :

$8x_B - 5y_B + 4z_B - 16 = 0 - 5 \times 4 + 4 \times 3 - 16 = -24 \neq 0$ donc $B \notin \mathcal{P}$

Affirmation 3 : VRAIE

Une représentation paramétrique de (AC) passant par $A(2 ; 0 ; 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

est : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Une représentation paramétrique de (BH) passant par $B(0; 4; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{HB} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{est : } \begin{cases} x = t' \\ y = 4 + 3t' \\ z = 3 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$$

$$\text{On résout : } \begin{cases} 2 + 2t = t' \\ 4t = 4 + 3t' \\ t = 3 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 2(3 + t') = t' \\ 4(3 + t') = 4 + 3t' \\ t = 3 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 6 + 2t' = t' \\ 12 + 4t' = 4 + 3t' \\ t = 3 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -8' \\ t' = -8 \\ t = 3 - 8 = -5 \end{cases}$$

Le système a une solution, **donc les droites (AC) et (BH) sont bien sécantes**

Affirmation 4 : VRAIE

$$\text{On a } \overrightarrow{DH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et comme vecteur normal du plan } (ABC): \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\overrightarrow{DH} = -\vec{v}$, les vecteurs sont colinéaires, donc $\overrightarrow{DH}$ est orthogonal au plan (ABC)

De plus $x_H - y_H + 2z_H - 2 = -1 - 1 + 2 \times 2 - 2 = 4 - 4 = 0$ donc $H \in (ABC)$

H est le point d'intersection de la droite passant par D et orthogonale au plan (ABC) : **c'est bien le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC)**