

Corrections Sujet d'entraînement n°2

Corrigé Exercice 5

1. $I\left(0; \frac{1}{4}; 1\right), J\left(\frac{1}{4}; 0; 1\right)$ et $K\left(1; 0; \frac{1}{4}\right)$.

2. On a $G(1; 1; 1)$ donc $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

Alors $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 0 = 0$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{IK} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 1 - 1 = 0$

$\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) car il est **orthogonal à deux de ses vecteurs directeurs**

3. $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) donc le plan a une équation du type $x + y + z + d = 0$

Comme $I \in (IJK)$, on a $x_I + y_I + z_I + d = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -\frac{5}{4}$

Donc (IJK) a comme équation cartésienne $x + y + z - \frac{5}{4} = 0$ soit, en multipliant tout par 4 :

$4x + 4y + 4z - 5 = 0$.

4. La droite (BC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et passe par le point $B(1; 0; 0)$

Donc une représentation paramétrique de (BC) est : $\begin{cases} x = 1 \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases}$

5. On cherche à résoudre le système : $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 0 \\ 4x + 4y + 4z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4 \times 1 + 4 \times t + 4 \times 0 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$

En prenant cette valeur de t dans la représentation paramétrique de (BC) , on trouve $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} \\ z = 0 \end{cases}$

Le point L a pour coordonnées $\left(1; \frac{1}{4}; 0\right)$

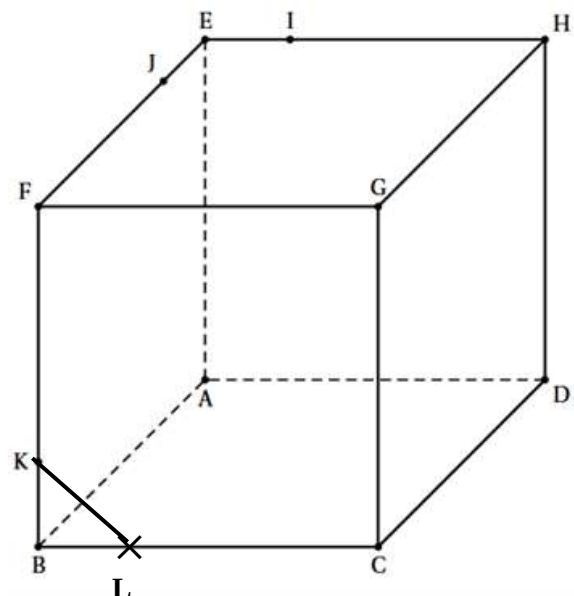
6. L'intersection du plan (IJK) avec la face $(BCGF)$ est le **segment $[KL]$**

7. Le plan (IJL) est le plan (IJK) dont on connaît l'équation cartésienne $4x + 4y + 4z - 5 = 0$

On peut donc tester l'appartenance du point M à ce plan :

$4x_M + 4y_M + 4z_M - 5 = 4 \times \frac{1}{4} + 4 \times 1 + 0 - 5 = 1 + 4 - 5 = 0$

$M \in (IJL)$ donc les points I, J, L et M sont bien coplanaires.



Corrigé Exercice 6

Partie A

1. Il s'agit de la répétition de 8 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, dont la probabilité de succès est 0,01 : la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = 0,01$

$$2. P(X = 2) = \binom{8}{2} \times 0,01^2 \times (1 - 0,01)^{8-2} = 28 \times 0,01^2 \times 0,99^6 \approx 0,0026$$

Il y a environ **0,26%** de chances que deux bits soient mal transmis.

$$3. p(X \geq 3) = 1 - p(X \leq 2) \approx 0,00005$$

La probabilité qu'il y ait plus de 3 bits mal transmis est de l'ordre de d'un demi-millionième, donc relativement négligeable

4. $E(X) = np = 8 \times 0,01 = 0,08$, il y a en moyenne 0,08 bits mal transmis par octet, c'est-à-dire sur 100 octets, par exemples, en moyenne 8 bits mal transmis.

Partie B

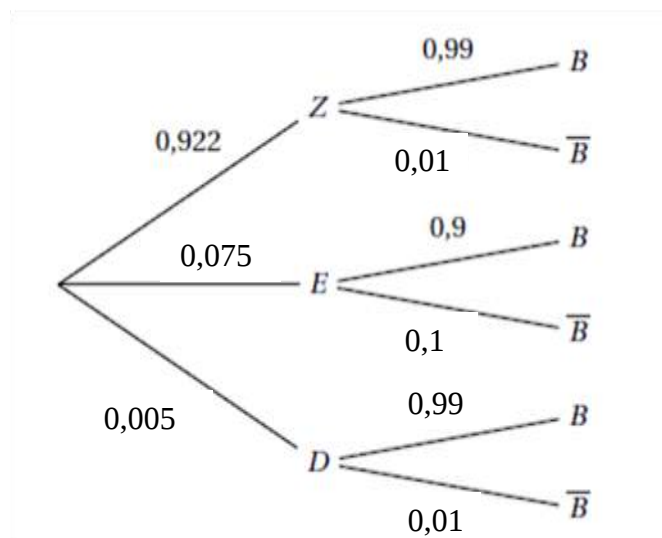
1. $\Rightarrow$

$$2. p(E \cap B) = p(E) \times p_E(B) = 0,075 \times 0,9 = \mathbf{0,0675}$$

Il y a 6,75 % de chance que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur

$$3. p(B) = p(Z \cap B) + p(E \cap B) + p(D \cap B) \\ = 0,91278 + 0,0675 + 0,00495 = 0,98523$$

Il y a environ 98,52 % de chance que le bit de parité soit transmis sans erreur



Corrigé Exercice 7

$$1. u_1 = 0,95u_0 + 200 = 0,95 \times 10000 + 200 = 9700 \text{ et } u_2 = 0,95 \times 9700 + 200 = 9415.$$

2. a.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 10000 \geq 4000$ la propriété est vraie au rang 0

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe un entier p quelconque tel que $u_p \geq 4000$

Hérédité : On a alors $0,95u_p \geq 3800$ et $0,95u_p + 200 \geq 4000$ soit $u_{p+1} \geq 4000$

La propriété est donc vraie au rang $p + 1$

Conclusion : On a bien, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 4000$.

b. La suite (u_n) est minorée par 4000, et puisqu'elle est décroissante, d'après le théorème des suites monotones bornées, elle converge.

3. Pour tout entier naturel n , on considère la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - 4000$.

$$a. v_0 = u_0 - 4000 = 10000 - 4000 = \mathbf{6000}$$

b. $v_{n+1} = u_{n+1} - 4000 = 0,95u_n + 200 - 4000 = 0,95(v_n + 4000) - 3800 = 0,95v_n + 3800 - 3800$
Donc $v_{n+1} = \mathbf{0,95v_n}$: la suite (v_n) est bien géométrique de raison 0,95.

c. On a $v_n = v_0 \times q^n = 6\,000 \times 0,95^n$ et $u_n v_n + 4000 = 6\,000 \times 0,95^n + 4000$ CQFD

d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,95^n = 0$ car $0,95 \in]-1; 1[$ donc on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6000 \times 0 + 4000 = \mathbf{4000}$

4. On peut modéliser le nombre d'individus à la fin de l'année $2020+n$, par la suite (u_n) :

- on a $u_0 = 10\,000$

- la baisse de 5 % chaque année revient à multiplier par $1 - 0,05 = 0,95$ le nombre d'individus de l'année précédente (soit $0,95u_n$) auquel on doit ajouter 200 individus réintroduits chaque année.

L'évolution du nombre d'individus conduit bien à la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,95u_n + 200$.

Selon la question (3d), le nombre d'individus va se stabiliser autour de 4000. L'espèce ne va pas s'éteindre, mais 60 % de la population aura disparu.

L'affirmation est cohérente.

Corrigé Exercice 8

1. a. $f(x) = uv$ avec $u = x$ et $u' = 1$ et $v = (1 - \ln x)^2$ donc $v' = 2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) (1 - \ln x)$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f'(x) &= (1 - \ln x)^2 + x \left(2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) (1 - \ln x) \right) = (1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x) \\ &= 1 - 2 \ln x + (\ln x)^2 - 2 + 2 \ln x = \mathbf{(\ln x)^2 - 1} \end{aligned}$$

D'autre part, on a bien : $(\ln x + 1)(\ln x - 1) = (\ln x)^2 - 1 = f'(x)$ CQFD

b. Donc

x	0	$\frac{1}{e}$	1
$\ln x + 1$		- 0 +	
$\ln x - 1$		- -	
$f'(x)$		+ 0 -	
$f(x)$	0	$\frac{4}{e}$	1

On a $\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$

et $\ln x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e$

$$f(e^{-1}) = e^{-1}(1 - \ln(e^{-1}))^2 = \frac{1}{e}(1 + 1)^2 = \frac{4}{e}$$

$$\text{et } f(1) = 1(1 - \ln(1))^2 = 1$$

2. a. Graphiquement, on a à peu près $ON_{0,2} \simeq 0,52$ et $OP_{0,2} \simeq 2,6$

$$\text{Donc } \mathcal{A}_{ON_{0,2}P_{0,2}} = \frac{ON_{0,2} \times OP_{0,2}}{2} \simeq \frac{0,52 \times 2,6}{2} \simeq \mathbf{0,68 \text{ unités d'aires}}$$

b. La tangente en $0,2$ a pour équation :

$$y = g'(0,2) \times (x - 0,2) + g(0,2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{0,2}(x - 0,2) + \ln(0,2) \Leftrightarrow y = \frac{1}{0,2}x + \ln(0,2) - 1$$

c. Les coordonnées de $P_{0,2}$ sont $(0; \ln(0,2) - 1)$

$$\text{Et on a } y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{0,2}x + \ln(0,2) - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0,2 \times (1 - \ln(0,2))$$

donc les coordonnées de $N_{0,2}$ sont $(0,2(1 - \ln(0,2)); 0)$

$$\text{On a alors } ON_{0,2} = 0,2(1 - \ln(0,2)) \quad \text{et} \quad OP_{0,2} = |\ln(0,2) - 1| = 1 - \ln(0,2)$$

donc

$$\mathcal{A}_{ON_{0,2}P_{0,2}} = \frac{ON_{0,2} \times OP_{0,2}}{2} = \frac{(0,2(1 - \ln(0,2))) \times (1 - \ln(0,2))}{2} = \frac{0,2(1 - \ln(0,2))^2}{2} = \frac{f(0,2)}{2} \text{ en unités d'aire.}$$

3. On remarque que $\mathcal{A}(a) = \frac{1}{2}f(a)$ Or la fonction $f(x)$ atteint son maximum pour $x = \frac{1}{e}$

Donc l'aire $\mathcal{A}(a)$ a bien une valeur maximale pour $a = \frac{1}{e}$. On a $\mathcal{A}\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{e} = \frac{2}{e}$

L'aire maximale est de $\frac{2}{e}$ unité d'aire