

Exercice 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

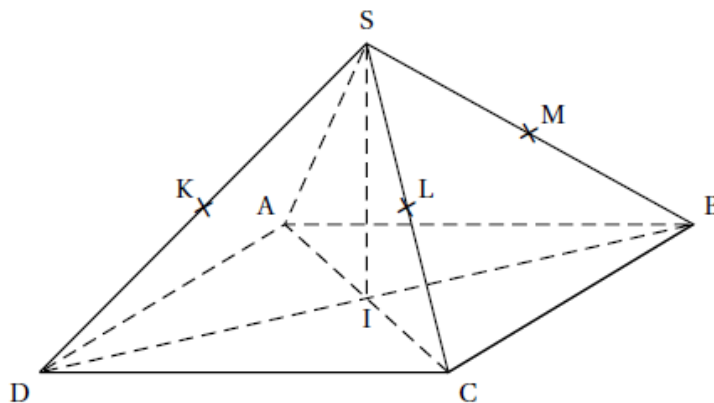
Partie A :

$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Le point I est le centre du carré $ABCD$.

On suppose que : $IC = IB = IS = 1$.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[SD]$, $[SC]$ et $[SB]$.



1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

- a. (DK) et (SD) b. (AS) et (IC) c. (AC) et (SB) d. (LM) et (AD)

2. On se place dans le repère orthonormé de l'espace $(I; \overrightarrow{IC}; \overrightarrow{IB}; \overrightarrow{IS})$. Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants $I(0; 0; 0)$; $A(-1; 0; 0)$; $B(0; 1; 0)$; $C(1; 0; 0)$; $D(0; -1; 0)$; $S(0; 0; 1)$. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

- a. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ b. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$
- c. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ d. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Partie B :

3. Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$

La fonction f' , dérivée de f , est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

- a. $f'(x) = 2e^{2x}$ b. $f'(x) = \frac{e^{2x}(x-1)}{x^2}$ c. $f'(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$ d. $f'(x) = \frac{e^{2x}(1+2x)}{x^2}$

4. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2x - \frac{3}{x}$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :

- a. $y = 7(x - 1)$ b. $y = x - 1$ c. $y = 7x + 7$ d. $y = x + 1$

5. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{3n}{n+2}$. On cherche à déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$ c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{2}$ d. On ne peut pas la déterminer

Exercice 2

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 4]$ par : $f(x) = -30x + 50 + 35 \ln x$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .

a. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 4]$, montrer que : $f'(x) = \frac{35-30x}{x}$

b. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1; 4]$.

c. En déduire les variations de f sur ce même intervalle.

2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α sur l'intervalle $[1; 4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3. En déduire le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1; 4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1; 4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x \ln x$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2 500 litres de jus de fruits. On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.

2. Pour tout x de l'intervalle $[1; 4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B .

3. a. À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1; 4]$.

b. En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}$

1. La copie d'écran ci-contre présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, les premiers termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 15.

a. Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ?

b. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

c. Calculer la valeur exacte du terme u_2

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$

a. Calculer les termes v_0 , v_1 et v_2

b. Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

Préciser sa raison et son premier terme.

c. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .

d. Déterminer, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .

3. En déduire la limite de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	0,8
4	2	0,66666667
5	3	0,57142857
6	4	0,5
7	5	0,44444444
8	6	0,4
9	7	0,36363636
10	8	0,33333333
11	9	0,30769231
12	10	0,28571429
13	11	0,26666667
14	12	0,25
15	13	0,23529412
16	14	0,22222222
17	15	0,21052632

Exercice 4

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le centre de la face

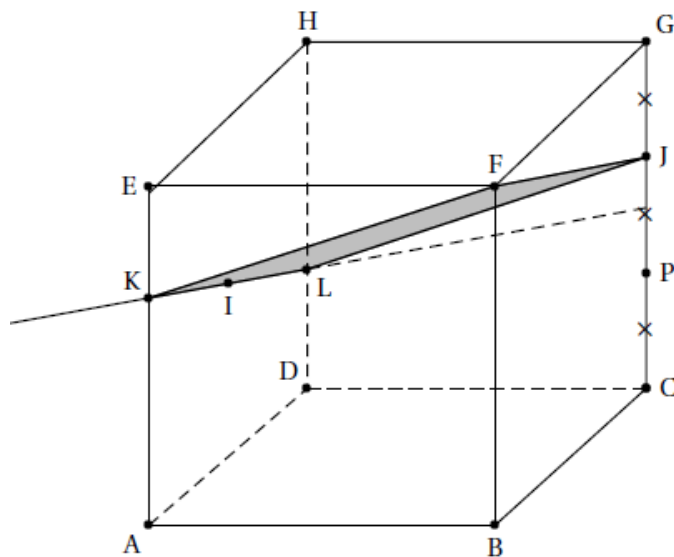
$ADHE$ et J est un point du segment $[CG]$.

Il existe donc $a \in [0 ; 1]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG}$

On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ) .

On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH) .

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$



Partie A : Dans cette partie $a = \frac{2}{3}$

1. Donner les coordonnées des points F, I et J .
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) .
3. a. Montrer que le point K est de coordonnées $(0; 0; \frac{2}{3})$.
b. Déterminer les coordonnées du point L , intersection des droites (d) et (DH) .
4. a. Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.
b. Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un losange.

Partie B : Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K(0; 0; 1 - \frac{a}{2})$ et $L(0; 1; \frac{a}{2})$

On rappelle que $a \in [0 ; 1]$.

1. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a .
2. Montrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.
3. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère $FJLK$ soit un losange? Justifier.