

Savoir Fi. 7 - Fonctions définies par une intégrale

Théorème : Si f est continue sur $[a; b]$,
la fonction F définie pour $x \in [a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable et $F' = f$
 F est la **primitive** de f qui s'annule en a

Conséquence : On peut déterminer le sens de variation de F grâce au signe de f

Exemples :

1) On définit pour $x \geq 1$ la fonction G par

$$G(x) = \int_1^x (1 - \ln t)dt$$

Déterminer le tableau de variation de G sur $[1; +\infty[$

2) On définit pour $x \geq 1$ la fonction H par

$$H(x) = \int_1^x (1 - \ln t)^2 dt$$

On admet que, pour $t \geq 1$, on a $(1 - \ln t)^2 \geq (1 - t)^2$

Déterminer la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$

3) Extrait BAC 2025

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x} + 2x - 1$

Soit n un entier naturel non nul.

On considère l'aire du domaine D_n délimité par la courbe C_f , la droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

On note

$$I_n = \int_1^n xe^{-x} dx$$

- À l'aide d'une intégration par parties, exprimer I_n en fonction de n
- Justifier que l'aire du domaine D_n est I_n .
- Calculer la limite de l'aire du domaine D_n quand n tend vers $+\infty$.