Probabilités conditionnelles Partie 1

1) Les définitions et les notations

- En mathématique, on appelle « **expérience aléatoire** » une épreuve dont le résultat est décidé par le hasard.
- Les différents résultats possibles sont appelés les « **issues** »
- Un « **évènement** » est un ensemble d'issues ayant un certain caractère.
  On le note avec une lettre majuscule.
- Un évènement est dit « **impossible** » quand il ne peut jamais arriver, il ne contient aucune issue.
  On le note avec le symbole « ∅ » qui signifie l'ensemble vide.
- Un évènement est dit « **certain** » quand il arrive toujours, il contient toutes les issues.
- L'**évènement contraire** d'un évènement A contient toutes les issues qui ne sont PAS celles de A.
  On le note avec un trait dessus « $\overline{A}$ » et on lit « A **barre** »
- **L'intersection** de deux évènements A et B, ce sont les issues qui appartiennent à la fois à l'évènement A et à l'évènement B. On le note « $A \cap B$ » et on lit « A **inter** B »
- **L'union** de deux évènements A et B, ce sont les issues qui appartiennent soit à l'évènement A soit à l'évènement B voir même aux deux évènements. On le note « $A \cup B$ » et on lit « A **union** B »

Exemples sur la classe :



Evènements :
- A : « l'élève est un **apprenti** »
- G_A : « l'élève fait partie du **groupe A** »
- G_B : « l'élève fait partie du **groupe B** »

$\overline{A}$: « L'élève **n'est pas** un apprenti »

$A \cap G_A$: « L'élève est un apprenti **et** appartient au groupe A »

$A \cup G_B$: « L'élève est un apprenti **ou** appartient au groupe B »

Exemples : Traduction Français/probabilités

On considère les évènements suivants :

M : « la personne choisie est **majeure** »
V : « la personne choisie habite en **ville** »
C : « la personne choisie habite à la **campagne** »
D : « la personne choisie se déplace en **deux-roues** »
A : « la personne choisie se déplace en **auto** »
P : « la personne choisie se déplace à **pied** »

1) Décrire à l'aide d'une phrase les évènements suivants :

$\bar{P}$:

$M \cap C$:

$V \cap D$:

$\bar{V}$:

$\bar{M} \cup A$:

2) Donner la notation de l'évènement décrit :

« La personne choisie habite à la campagne et se déplace en auto » :

« La personne choisie n'est pas majeure » :

« La personne choisie est un majeur qui se déplace à pied » :

« La personne choisie ne se déplace pas en deux-roues ou habite en ville » :

2) Le calcul de probabilités

Formule : La probabilité qu'un évènement A arrive se note $\boldsymbol{p(A)}$ et se calcule :

$$\boldsymbol{p(A)} = \frac{nombre\ dans\ \boldsymbol{A}}{nombre\ \boldsymbol{Total}}$$

Remarques : • La probabilité est un nombre compris **entre 0 et 1.**

• On a la formule : $\boldsymbol{p(A)} + \boldsymbol{p(\bar{A})} = \mathbf{1}$ donc $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Exemples sur la classe :

La probabilité que l'élève soit dans le groupe B : $p(G_B) =$

La probabilité que l'élève ne soit un apprenti $p(\bar{A}) =$

La probabilité que l'élève soit un apprenti du groupe A $p(A \cap G_A) =$

Exemple : Des proportions aux probabilités

« Une enquête a été menée auprès de 1 200 personnes. On a obtenu les résultats suivants :

- 850 personnes avaient moins de 30 ans.
- 615 personnes pratiquaient régulièrement une activité sportive, dont 261 qui pratiquaient plus de 6h par semaine.
- 62 % des personnes interrogées étaient allées au cinéma dans les deux mois précédents.
- 245 personnes avaient plus de trente ans et étaient allées au cinéma dans les deux mois précédents.

On choisit une personne au hasard parmi celles qui ont répondu à l'enquête.

On définit les **évènements** suivants :

- T : « la personne a moins de 30 ans »
- C : « la personne est allée au cinéma dans les deux derniers mois »
- A : « la personne pratique une activité sportive »
- S : « la personne pratique une activité sportive plus de 6h par semaine »

1) Quelle est la probabilité que la personne choisie ait **moins de 30 ans** ?

2) Quelle est la probabilité que la personne choisie **soit allée au cinéma au cours des deux derniers mois** ?

3) Quelle est la probabilité que la personne choisie **ne pratique pas une activité sportive** ?

4) Quelle est la probabilité que ce soit une personne **de plus de 30 ans et ayant été au cinéma** dans les deux mois précédents ?

5) On sait que la personne **choisie pratique une activité sportive**. Quelle est alors la probabilité qu'elle la pratique **plus de 6h par semaine** ?

3) Les tableaux de probabilités

a) Du tableau d'effectifs au tableau de probabilités :

Quand on étudie une population selon deux caractères différents, on donne souvent les résultats dans un « tableau à double entrée »

On donne le **tableau d'effectifs**, sur un total de 800

	E	$\bar{E}$	Total
A	80	20	100
B	100	200	300
C	20	380	400
Total	200	600	**800**

Méthode :

Pour avoir le tableau de probabilité, on divise tous les effectifs par le **total**

Pour avoir les probabilité en pourcentage (%), on multiplie le résultat par 100

On veut le **tableau de probabilités**, en décimales, **sur un total de 1**

	E	$\bar{E}$	Total
A			
B			
C			
Total			1

Ou le tableau de **probabilités**, **en %,** sur un total de 100%

	E	$\bar{E}$	Total
A			
B			
C			
Total			100 %

b) Compléter un tableau de probabilité à double entrée

Tableau de probabilités, en décimales
La total fait 1

	E	$\bar{E}$	Total
T		0,25	0,3
$\bar{T}$			
Total	0,25		

Tableau de probabilités, **en %**
Le total fait 100 %

	B	$\bar{B}$	Total
R	50 %		
A			9 %
M		7 %	31 %
Total		20 %	

c) Lire les probabilités dans un tableau

Dans les tableaux, on lit les probabilités des **intersections** et les probabilités **totales**

	E	$\bar{E}$	Total
N	$p(N \cap E)$	$p(N \cap \bar{E})$	$p(N)$
$\bar{N}$	$p(\bar{N} \cap E)$	$p(\bar{N} \cap \bar{E})$	$p(\bar{N})$
Total	$p(E)$	$p(\bar{E})$	1

Exemple : Des probas au tableau et vice-versa

	E	$\bar{E}$	Total
A			15 %
B	20 %		25 %
C		35 %	60 %
Total		45 %	100 %

1) À partir du tableau de probabilités ci-contre, déterminer :

$p(B)$ $\quad$ $p(\bar{E})$

$p(C \cap E)$ $\quad$ $p(\bar{E} \cap A)$

2) On donne : $p(Y) = 0{,}3$; $p(\bar{D}) = 65\ \%$ et $p(D \cap A) = 0{,}3$

Compléter le tableau de probabilités ci-contre :

	A	Y	Total
D			
$\bar{D}$			
Total			

d) Interpréter les probabilités d'un tableau

Un nouveau logiciel permet de filtrer les messages sur une messagerie électronique.

Les concepteurs l'ont testé pour 1000 messages et voici leurs conclusions.

70% des messages entrants sont indésirables
67,1 % des messages sont éliminés
0,6 % des messages sont bienvenus et éliminés

	I	B	Total
E			
C			
Total			

On note B, l'événement : « le message est bienvenu »
On note I, l'événement : « le message est indésirable »
On note E, l'événement : « le message est éliminé »
On note C, l'événement : « le message est conservé »

1) Compléter le tableau

2) Quelle est la probabilité que le message soit conservé ?

3) Déterminer $p(I \cap E)$ et interpréter dans le contexte

4) Calcul de probabilités conditionnelles à partir d'un tableau

Notation : La probabilité que B arrive, sachant que A est déjà arrivé se note $p_A(B)$ et se lit « p de A sachant B ».

Formule : $$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

a) Calcul de probabilités conditionnelles à partir d'un tableau

On donne le tableau de probabilité ci-contre :
Calculer :

	A	B	Total
C	0,1	0,2	0,3
$\overline{C}$	0,3	0,4	0,7
Total	0,4	0,6	1

$p_C(A)$

$p_B(\bar{C})$

Traduction Français-Probabilités

Une entreprise qui produit des chocolats cherche à étudier l'impact de sa campagne publicitaire sur la vente de ses produits. Elle réalise une enquête auprès de 850 clients d'un supermarché, en demandant s'ils ont acheté un de leur produit et s'ils ont vu le spot de publicité de leurs produits.
On choisit au hasard l'un de ces clients. On définit les évènements :
S : le client a vu le spot publicitaire
A : le client a acheté plusieurs fois leurs chocolats
U : le client a acheté une seule fois leurs chocolats
J : le client n'a jamais acheté leurs chocolats

1) Donner la notation mathématique des probabilités suivantes :

a. Quelle est la probabilité que le client n'ait jamais acheté leurs chocolats, sachant qu'il a vu le spot publicitaire

b. Le client a acheté pour la 1ère fois leurs chocolat. Quelle est la probabilité qu'il ait vu le spot publicitaire ?

c. Le client n'a pas vu le spot publicitaire mais achète régulièrement leurs chocolats.

2) Interpréter à l'aide d'une phrase dans le contexte les probabilités suivantes :

a. $p_J(\bar{S})$

b. $p_S(A)$

Exemple

Une activité physique régulière est recommandée aux personnes diabétiques car elle permet d'améliorer le contrôle du diabète et la réduction des risques de complications cardio-vasculaires. Une activité physique est considérée comme régulière lorsqu'elle est composée des sessions de 30 min par jour, cinq jours par semaine.

Une enquête portant sur un échantillon de 10 000 personnes âgées de 18 à 65 ans, a été menée en France. On a obtenu les résultats suivants :

- 5 % des personnes sont atteintes de diabète (type I et II confondus);
- 33,5 % des personnes pratiquent une activité physique régulière
- 2,1 % des personnes sont diabétiques et pratiquent une activité physique régulière

On choisit une personne au hasard. On définit les évènements suivants :
D : la personne est atteinte de diabète
A : la personne pratique une activité physique régulière.

1. Compléter le tableau suivant :

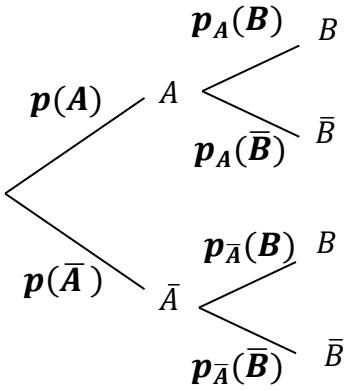
	A	$\bar{A}$	Total
D			
$\overline{D}$			
Total			

2. Déterminer la probabilité que la personne choisie soit atteinte de diabète et ne pratique pas d'activité physique régulière.

3. Sachant que la personne choisie pratique une activité physique régulière, quelle est la probabilité qu'elle soit atteinte de diabète ?

4. L'affirmation suivante est-elle vraie ou est-elle fausse ? « Parmi les personnes ne pratiquant pas d'activité physique régulière, 10 % sont atteintes de diabète ». La réponse devra être justifiée

5) Représentation des probabilités à l'aide d'un arbre



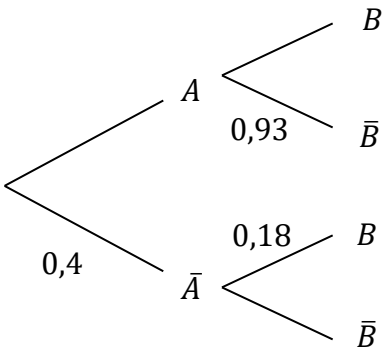
Dans les arbre, on lit : - les probabilités **totales**
- les probabilités **conditionnelles**

Par contre il n'y a pas de probabilités d'intersections
(il faudra les calculer)

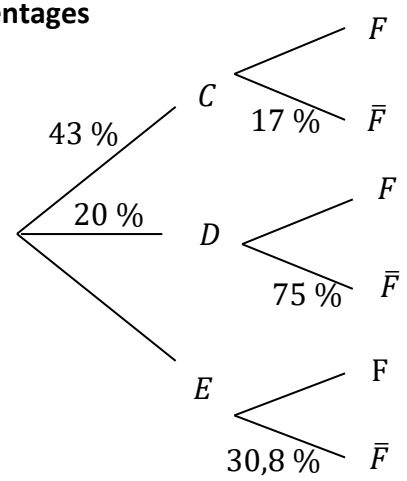
Compléter un arbre de probabilités

Règle : Dans un arbre de probabilité, la **somme** des probabilités **sur chaque embranchement est égale à 1** (en décimales) ou **à 100 %** (en pourcentages).

Nombres décimaux



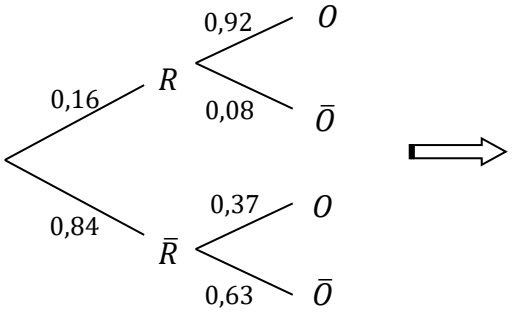
Pourcentages



Des probas à l'arbre et vice-versa

Attention !

Toutes les probabilités, totales ou conditionnelles, ne sont pas présentes… Seulement selon le 1er tri



$\Longrightarrow$

$p(R) =$ $\quad$ $p_{\bar{R}}(O) =$

$p_R(O) =$ $\quad$ $p(\bar{R}) =$

$p(O) =$ $\quad$ $p_{\bar{O}}(R) =$

$p(\bar{R}) =$ $\quad$ $p_{\bar{R}}(\bar{O}) =$

$p_O(\bar{R}) =$ $\quad$ $p(\bar{O}) =$

Et dans l'autre sens

$p(C) = 0{,}2$

$p_C(\bar{E}) = 0{,}85$

$p(E) = 0{,}23$

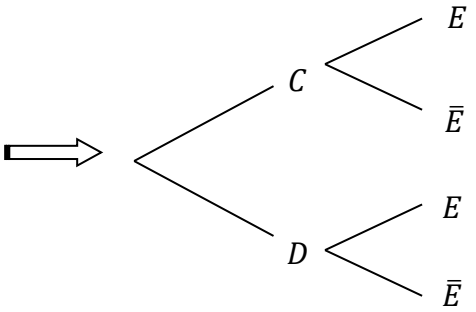
$p_D(E) = 0{,}25$

$p_{\bar{E}}(C) = 0{,}22$

$p(D) = 0{,}8$

$p_D(\bar{E}) = 0{,}75$

$p_E(D) = 0{,}87$

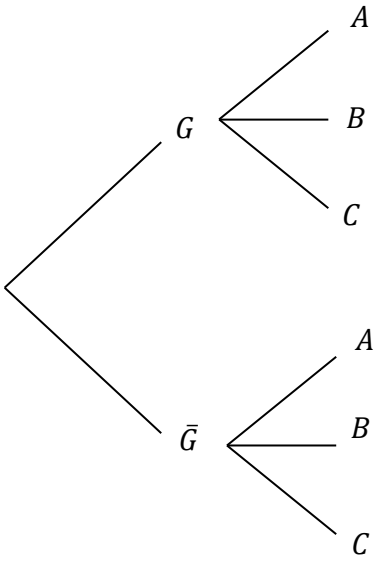


Traduction Français-Probabilités

Du texte à l'arbre

Une enquête a été réalisée dans une grande surface de multimédia sur des clients ayant acheté un téléviseur deux ans plus tôt.
On a constaté que :

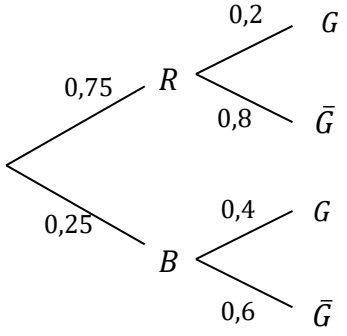
- 40% de ces clients ont souscrit une garantie de deux ans. Parmi eux :
  - 25 % a contacté une seule fois le service après-vente (SAV);
  - 28% n'ont pas contacté le SA V;
  - les autres ont contacté le SA Vau moins deux fois.
- Parmi les clients n'ayant pas souscrit de garantie de deux ans :
  - 80% n'ont pas contacté le SAV;
  - 15% ont contacté le SAV une seule fois;
  - les autres ont contacté le SAV au moins deux fois.



On choisit au hasard un client ayant acheté un téléviseur dans ce magasin deux ans plus tôt et on note les évènements :

- G : « Le client a souscrit une garantie de deux ans »;
- A : « Le client n'a pas contacté le SAV »;
- B : « Le client a contacté le SAV une seule fois »;
- C : « Le client a contacté le SAV au moins deux fois »

Et vice versa



Une urne contient des jetons rouges et des jetons bleus. Une partie des jetons rouges et des jetons bleus sont gagnants. Un joueur tire au hasard un jeton de l'urne. On note :

- *R* l'évènement : « Le jeton est rouge ».
- *B* l'évènement : « Le jeton est bleu ».
- *G* l'évènement : « Le jeton est gagnant ».

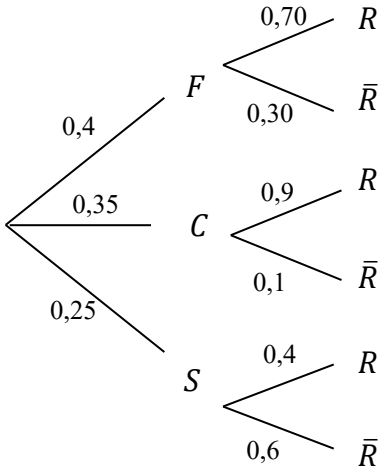
Il y a …… % de jetons rouges et …… % de jetons bleus.

Parmi les jetons rouges, …… % sont gagnants alors que …… % des jetons bleus sont gagnants.

Exemple : Interpréter un arbre

« Un serveur, travaillant dans une pizzeria, classifie les clients selon deux critères :
- S'ils sont seuls, en couple ou en famille
- S'ils laissent ou non un pourboire

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria.
On s'intéresse aux évènements suivants :
F : « la table est occupée par une famille »
S : « la table est occupée par une personne seule »
C : « la table est occupée par un couple »
R : « le serveur reçoit un pourboire »



Les probabilités sont représentées dans l'arbre ci-contre :

1) Quelle est la probabilité que la table soit occupée par une personne seule ?

2) Si la table est occupée par un couple, quelle est la probabilité qu'ils laissent un pourboire ?

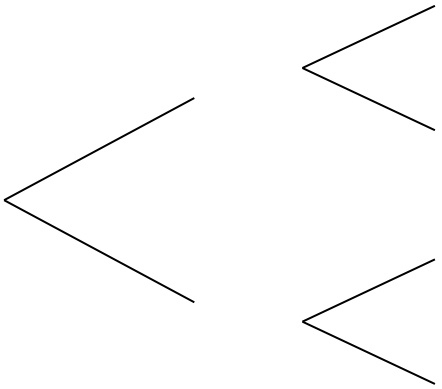
3) S'il s'agit d'une famille, quelle est la probabilité qu'ils ne laissent pas de pourboire ?

Exemple : Construire un arbre

Une agence de voyage a effectué un sondage auprès de ses clients pendant la période estivale.

Le sondage est effectué sur l'ensemble des clients.
Ce sondage montre que :
- 38% des clients voyagent en France;
- 83% des clients voyageant en France sont satisfaits;
- 78% des clients voyageant à l'étranger sont satisfaits.

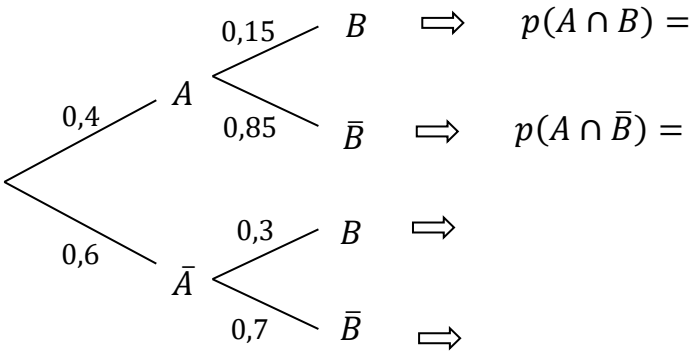
On interroge un client au hasard.
On considère les évènements suivants :
- F : « le client a voyagé en France »;
- E : « le client a voyagé à l'étranger »;
- S : « le client est satisfait du voyage »



6) Calcul de probabilités à partir d'un arbre

Calcul des probabilités d'intersections : On **multiplie** les probabilités du « chemin »

Formule $\boldsymbol{p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)}$

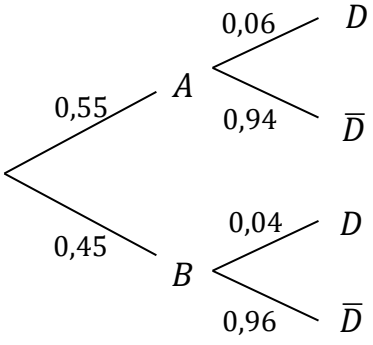


Exemple

Les batteries sont fabriquées dans deux ateliers : Arobase et Bestphone.
À l'issue de la fabrication, certaines batteries sont contrôlées, pour voir si elles présentent ou non des défauts.
Une batterie est prélevée de façon équiprobable dans le stock constitué des batteries produites par les deux ateliers.
On considère les évènements suivants :

A : « la batterie provient de l'atelier Arobase »
B : « la batterie provient de l'atelier Bestphone »
D : « la batterie présente au moins un défaut »

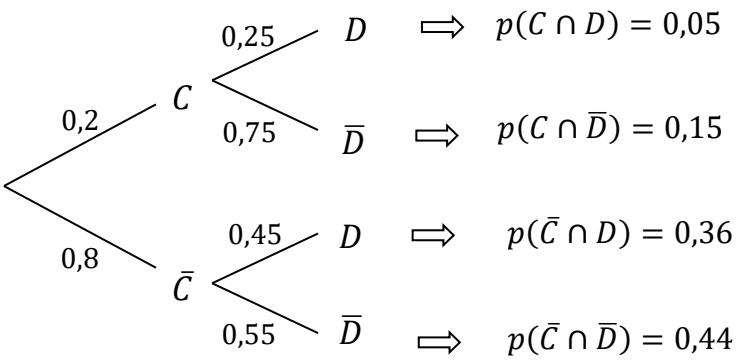
La situation est représentée par l'arbre de probabilité ci-contre.



1) Calculer la probabilité que la batterie provienne de l'atelier Bestphone et présente au moins un défaut.

2) Définir par une phrase l'évènement $A \cap \overline{D}$ et calculer sa probabilité.

Calcul des probabilités <u>totales</u> : On **<u>additionne</u>** les intersections

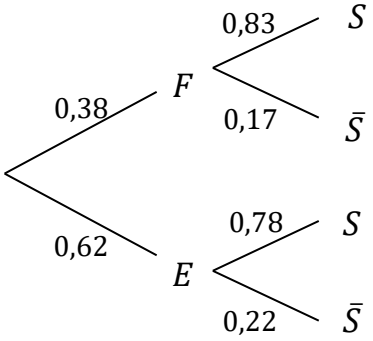


Exemple

Une agence de voyage a effectué un sondage auprès de ses clients pendant la période estivale.
On interroge un client au hasard.
On considère les évènements suivants :

- F : « le client a voyagé en France »;
- E : « le client a voyagé à l'étranger »;
- S : « le client est satisfait du voyage »

L'arbre de probabilité représentant la situation est donné ci-contre.



1) Définir par une phrase l'évènement $E \cap S$ et calculer sa probabilité.

2) Montrer que $P(S) = 0{,}799$.