

Corrigé Exercice 19

1) a. $2 < \mathcal{D} < 3$

b. $G'(x) = \frac{1}{x}(\ln x + 1) + \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 1 + \ln x}{x} = \frac{2 \ln x + 1}{x} = g(x)$

$\Rightarrow G$ est bien une primitive de g

c. $\mathcal{D} = \int_1^3 g(x)dx = [\ln(x)[\ln(x) + 1]]_1^3 = \ln 3 \times (\ln 3 + 1)$ donc $\mathcal{D} \simeq 2,3$

2) a. On a : $A = \int_{-1}^3 (g(x) - f(x))dx = \int_{-1}^3 (4x + 6 - 2x^2)dx$

b. On obtient : $A = \left[2x^2 + 6x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^3 = \frac{64}{3}$

3) a. $f'(x) = -2e^{-2x} + 1$ et $f''(x) = +4e^{-2x}$ donc $f''(x) > 0$ et f est convexe, donc la courbe de f est au-dessus de ses tangentes.

En particulier $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessus de $\mathcal{T}$ pour $x \geq 0$, en particulier pour $x \in [0; 1]$

b. $\mathcal{A} = \int_0^1 (f(x) - (-x + 1)) dx = \int_0^1 (e^{-2x} + 2x - 1)dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x} + x^2 - x \right]_0^1$
 $= \left(-\frac{1}{2}e^{-2} + 1^2 - 1 \right) - \left(-\frac{1}{2}e^0 - 0 \right) = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2})$

Corrigé Exercice 20

La zone 1 est la moitié du carré de côté 1, d'aire $\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}$

L'aire de la zone 2 est l'aire entre la courbe de x^2 , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, elle est donnée par l'intégrale :

$$\mathcal{A}_2 = \int_0^1 (x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

L'aire de la zone 3 est donnée par : $\mathcal{A}_3 = \frac{1}{2} - \mathcal{A}_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

Corrigé Exercice 21

a. $g'(x) = -10e^{-x} + 10(-x - 1)(-e^{-x}) = (-10 + 10x + 10)e^{-x} = 10xe^{-x} = f(x)$

Donc g est une primitive de f sur $[1; 8]$.

b. La fonction f est strictement positive sur $[1; 8]$ donc l'aire de la partie hachurée est :

$$\mathcal{A} = \int_1^8 f(x)dx = g(8) - g(1) = (10(-8 - 1)e^{-8}) - (10(-1 - 1)e^{-1}) = 20e^{-1} - 90e^{-8}$$

On a alors $M = 300 + 50 \times \mathcal{A} = 300 + 50(20e^{-1} - 90e^{-8})$

Soit $M \simeq 666,37$

Le montant du devis de l'artiste est de 666,37 €