

Savoir Sv.2 - Corrigés

Corrigé Exercice 6

1.

$ X - 7 < 3 \Leftrightarrow$	$4 < X < 10$	$ Z - 10 \leq 2 \Leftrightarrow$	$8 \leq Z \leq 12$
$ K - 20 > 7 \Leftrightarrow$	$K < 13 \text{ ou } K > 27$	$ R - 1,4 < 0,2 \Leftrightarrow$	$1,2 < R < 1,6$

2.

$4 < X < 8 \Leftrightarrow$	$ X - 6 < 2$	$H \notin]100; 200[\Leftrightarrow$	$ H - 150 > 50$
$F \in [40; 60] \Leftrightarrow$	$ F - 50 \leq 10$	$0 \leq Y \leq 10 \Leftrightarrow$	$ Y - 5 \leq 5$
$T \leq 1,4 \text{ ou } T \geq 2 \Leftrightarrow$	$ T - 1,7 \geq 0,3$	$3,05 < U < 3,15 \Leftrightarrow$	$ U - 3,1 < 0,05$

3.

$P(9 < X < 11) < 0,1$	$\Leftrightarrow P(X - 10 < 1) < 0,1$	
$P(Y - 23 \geq 3) < 0,06$	$\Leftrightarrow P(20 < Y < 26) > 1 - 0,06$	$\Leftrightarrow P(20 < Y < 26) > 0,94$
$P(A - 9 \geq 4) \leq \frac{2}{n}$	$\Leftrightarrow P(A - 9 < 4) \geq 1 - \frac{2}{n}$	
$P(0,56 < T_n < 0,6) \geq \frac{0,5}{n}$	$\Leftrightarrow P(T_n - 0,58 < 0,02) \geq \frac{0,5}{n}$	

Corrigé Exercice 7

1. Dire que X n'est pas entre 4 et 10 revient à dire que l'écart avec son espérance $E = 7$ est supérieure à 3, c'est-à-dire $|X - 7| > 3$. Alors, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|X - 7| > 3) \leq \frac{2^2}{3^2} \approx 0,44 \Rightarrow P(|X - 7| > 3) < 0,45 \quad \text{CQFD}$$

2. Pour que Y soit entre 50 et 150 ($50 < Y < 150$), il faut que l'écart de Y avec son espérance $E = 100$ soit inférieure à 50, c'est-à-dire $|Y - 100| < 50$.

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|Y - 100| > 50) \leq \frac{30}{50^2} = 0,012 \Rightarrow P(|Y - 100| < 50) \geq 1 - 0,012$$

$$\Rightarrow P(50 < Y < 150) \geq 0,988 > 0,98 \quad \text{CQFD}$$

3. Pour avoir $160 < T < 190$, on doit avoir $|T - 175| < 15$.

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|Y - 175| > 15) \leq \frac{22}{15^2} \approx 0,98 \Rightarrow P(|Y - 175| < 15) \geq 1 - 0,098$$

$$\Rightarrow P(160 < T < 190) \geq 0,902 > 0,9$$

Il y a donc plus de 90% de chances que sa taille soit comprise entre 1,60 et 1,90 m.

Corrigé Exercice 8

On a $E(Z) = 100 \times 23,50 = \mathbf{2350}$.

Les variables aléatoires étant indépendantes, on a aussi : $V(Z) = 100 \times 357,75 = \mathbf{35\,775}$.

Pour avoir $Z \in [1950; 2750]$, il faut avoir $|Z - 2350| < \mathbf{400}$.

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|Z - 2350| > 400) \leq \frac{35\,775}{400^2} \Rightarrow P(|Z - 2350| < 400) \geq 1 - \frac{35\,775}{400^2}$$

Or on a $1 - \frac{35\,775}{400^2} \simeq 0,776$ et par élargissement $1 - \frac{35\,775}{400^2} \geq 0,75$

On a bien $P(Z \in [1950; 2750]) \geq 0,75$ **CQFD**

Corrigé Exercice 9

1. $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) \simeq \mathbf{0,769}$.

Il y a **76,9%** de chances que plus de 6 candidats obtiennent leur permis dès la 1re tentative.

2. $E(X) = np = \mathbf{7,47}$ et $V(X) = np(1 - p) = 7,47 \times 0,253 \simeq \mathbf{1,89}$.

3. a. On a : $Z = X + Y$. Donc $E(Z) = E(X) + E(Y) = 7,47 + 22,53 = \mathbf{30}$
et étant donné que X et Y sont indépendantes, $V(Z) = V(X) + V(Y) \simeq \mathbf{11,70}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a : $P(|Z - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$ avec $\mu = 30$ et $V \simeq 11,7$.

Avoir moins de 20 ($= 30 - 10$) ou plus de 40 ($= 30 + 10$) correspond à $\delta = 10$.

On a alors :

$$P(|Z - 30| \geq 10) \leq \frac{11,7}{10^2} = 0,117 < 0,12 \Rightarrow P(20 \leq Z \leq 40) < 0,12$$

Donc la probabilité qu'il y ait moins de 20 ou plus de 40 candidats qui aient leur permis dès la première tentative est bien inférieure à 0,12.

