

Corrections Savoir Vps. 7

Corrigé Exercice 12

1) a. On a $\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ on calcule $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -1 \times 4 + 2 \times 2 = -4 + 4 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux, donc **le triangle ABC a un angle droit en C : il y est bien rectangle**

b. On a $\overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ on calcule $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{DE} = 3 \times 3 + 2 \times (-5) = 9 - 10 = -1$

Les vecteurs $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{CB}$ ne sont pas orthogonaux, donc **les droites (FE) et (DE) ne sont pas perpendiculaires**

2) a. $\overrightarrow{FM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FE} - \frac{3}{2}\overrightarrow{GF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = -\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. Dans le triangle EFG, la hauteur issue de F doit être perpendiculaire à (EG)

On calcule $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{EG} = \frac{3}{2} \times (-1) + \frac{3}{2} \times 1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont orthogonaux, donc on a $(FM) \perp (EG)$ et, dans le triangle EFG, **la droite (FM) est bien la hauteur issue de F.**

c. $\overrightarrow{GK} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FM} = -\overrightarrow{FG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

On calcule $\overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{GM} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{GM}$ ne sont pas orthogonaux, donc **le triangle KGM n'est pas rectangle en G**

d. On a $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{FE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FG} = 2\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Et comme $\overrightarrow{FE} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on calcule $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{FE} = 0 \times 1 + 2 \times 0 = 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont orthogonaux, donc **les droites (EF) et (PM) sont perpendiculaires**

1) $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ On calcule $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MS} = -18 + 18 = 0$

$\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{MS}$ sont orthogonaux, donc **le triangle MPS est bien rectangle en M**

2) dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ on a $\overrightarrow{ST} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Et $\overrightarrow{UW} = \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AW} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

$$= -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{UW} = -4 \times \frac{3}{2} + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$ Les vecteurs $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{UW}$ sont orthogonaux, donc $(ST) \perp (UW)$

Corrigé Exercice 13

$$1) a) \vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AB} + \vec{BJ} = -\frac{1}{5}\vec{AD} + \vec{AB} + \frac{3}{5}\vec{BC} = \frac{2}{5}\vec{AD} + \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{IJ} \left(1; \frac{2}{5}\right)$$

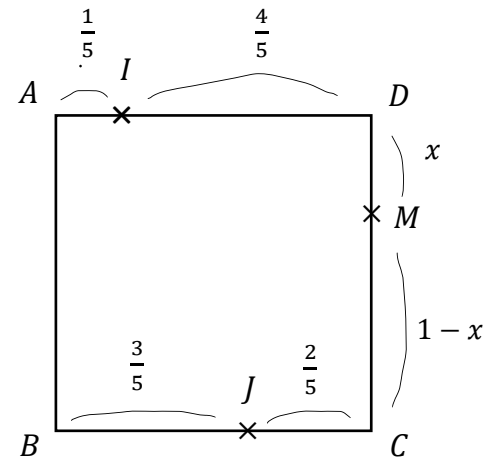
$$\vec{BM} = \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DM} = \vec{AD} - \vec{DC} + x\vec{DC} = (-1 + x)\vec{DC} + \vec{AD}$$

$$= (-1 + x)\vec{AB} + \vec{AD}$$

$$\Rightarrow \vec{BM} \left(x - 1; 1\right)$$

$$b) \text{ On a } \vec{IJ} \cdot \vec{BM} = 1(x - 1) + \frac{2}{5} \times 1 = x - 1 + \frac{2}{5} = x - \frac{3}{5}$$

Les droites (IJ) et (BM) sont perpendiculaires quand $\vec{IJ} \cdot \vec{BM} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{3}{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{5}$



2) Il faut montrer que $\vec{AT}$ et $\vec{RB}$ sont orthogonaux, donc que $\vec{AT} \cdot \vec{RB} = 0$

Une des façons, c'est de donner les coordonnées dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$

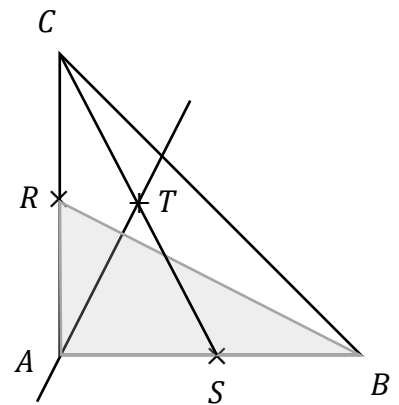
$$A(0; 0); R\left(0; \frac{1}{2}\right); B(1; 0) \text{ On a alors } \vec{RB} \left(1; -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Et } \vec{AT} = \vec{AS} + \vec{ST} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{SC} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{SA} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \quad \text{Donc } \vec{AT} \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Alors } \vec{AT} \cdot \vec{RB} = 1 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0$$

On a bien (AT) et (RB) qui sont perpendiculaires, (AT) est la hauteur issue de A du triangle ARB.



3) a. $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$! c'est un carré, on a $(AB) \perp (AD)$!

$$b. \vec{KC} = \vec{KA} + \vec{AB} + \vec{BC} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \vec{AB} + \vec{AD} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \vec{AD} \quad \text{CQFD}$$

$$\text{et } \vec{DL} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BL} = -\vec{AD} + \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD} = \vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD} \quad \text{CQFD}$$

$$c. \vec{KC} \cdot \vec{DL} = \left(\frac{1}{4}\vec{AB} + \vec{AD}\right) \cdot \left(\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD}\right) = \frac{1}{4}\vec{AB}^2 - \frac{1}{16}\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \vec{AD} \cdot \vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD}^2$$

$$\text{Or } \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \text{ donc } \vec{KC} \cdot \vec{DL} = \frac{1}{4}\vec{AB}^2 - \frac{1}{4}\vec{AD}^2 \text{ mais comme } ABCD \text{ est un carré, } \vec{AB}^2 = \vec{AD}^2$$

Donc $\vec{KC} \cdot \vec{DL} = 0$ les vecteurs sont orthogonaux, et les droites (KC) et (DL) sont perpendiculaires