

Second degré - Équations (et inéquations)

Savoirs

- Sd. 1** Résolution d'une équation du 2nd degré
- Sd. 2** Factorisation et forme canonique du 2nd degré
- Sd. 3** Tableaux de signes du 2nd degré - Inéquations



EXERCICES en classe

Savoir Sd. 1: Résolution d'équations du 2nd degré

Exercice 0 : Résolution par étape

1^{ère} étape : Bien identifier les coefficients

Dans chacun des cas, identifier les coefficients a , b et c de l'expression $ax^2 + bx + c = 0$
(Attention à l'ordre et aux coefficients nuls)

	a	b	c
$3x^2 - 5x + 1 = 0$			
$0,5x^2 - x + 1,2 = 0$			
$x^2 - 7 = 0$			
$x + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} = 0$			

	a	b	c
$2x^2 - 4x = 0$			
$4x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$			
$4 - 3x^2 = 0$			
$x^2 - 3x = 5$			

2^{ème} étape : Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

- a) $3x^2 - 5x + 1 = 0$ b) $\frac{x^2}{4} + x - 3 = 0$ c) $3x^2 - 6 = 0$
e) $x^2 - 5x = 0$ g) $9x^2 - 12x + 4 = 0$ h) $x - 2x^2 + 3 = 0$

3^{ème} étape : Calculer les racines

Dans chaque cas, on donne le discriminant Δ . En déduire le nombre de solutions, et, quand elles existent, calculer ces solutions ($x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_0 = \frac{-b}{2a}$...)

- a) $x^2 + 4x - 5 = 0$ et $\Delta = 36$ b) $-5x + 6x^2 + 1 = 0$ et $\Delta = 1$
c) $2x^2 + 2x - 1 = 0$ et $\Delta = 12$ d) $-3x^2 - 2x - 1 = 0$ et $\Delta = -8$
e) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$ et $\Delta = 0$ f) $\frac{3x^2}{4} + 3x - 9 = 0$ et $\Delta = 36$

Exercice 1 : Équation du 2nd degré

Résoudre **intégralement** les équations suivantes : calcul du Δ et, selon le signe, détermination des solutions.

- a) $2x^2 + 4x - 30 = 0$ b) $n^2 - 4n + 4 = 0$
c) $-x^2 + 2x = -3$ d) $-2x + 4x^2 + 3 = 0$ e) $x^2 = 10x$
f) $-x^2 - 3x + 1 = 0$ g) $4y^2 - 24 = 0$ h) $5x = 3x^2 + 4$

Un niveau au-dessus

- a) $-\frac{x^2}{2} + x + 5 = 0$
b) $t^2 + \frac{5}{3}t - 4 = 0$
c) $\frac{4x^2}{3} - 4x = -\frac{9}{4}$

Exercice 2 : Équations produits ou quotients nuls

Résoudre les équations produits et quotients. Attention, bien penser à donner les domaines de définition pour les quotients (valeurs interdites)

a) $2x(2x^2 - x - 15) = 0$ b) $\frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 3x - 2} = 0$ c) $(x^2 - x)(x^2 + x + 2) = 0$ d) $\frac{2n^2 + 4n - 6}{1 - n} = 0$

Exercice 3 : Racines d'un polynôme de degré 3

On donne le polynôme $P(x) = -2x^3 + 7x^2 + 7x - 12$

- Montrer que le nombre 4 est une racine du polynôme P
- Montrer qu'on a $P(x) = (x - 4)(-2x^2 - x + 3)$
- Résoudre $P(x) = 0$

Un niveau au-dessus

On donne : $R(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$

- Montrer que 1 est une racine de R
- On pose : $R(x) = (x - 1)S(x)$ avec $S(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminer les nombres a, b et c
- Déterminer les racines du polynôme R

Exercice 4 : Équations bicarrées *

On donne l'équation $(E) : x^2(x^2 - 2) = 3$

- On pose $Y = x^2$. Montrer qu'on a l'équivalence :
$$x^2(x^2 - 2) = 3 \Leftrightarrow Y^2 - 2Y - 3 = 0$$
- Déterminer les deux solutions Y_1 et Y_2 de l'équation $Y^2 - 2Y - 3 = 0$
- En posant $Y_1 = x^2$ et $Y_2 = x^2$, retrouver toutes les solutions de (E)

Sans aide

Résoudre l'équation

$$2x^4 = 8x^2 + 10$$

Exercice 5 : Équations selon un paramètre ***

On considère le polynôme P défini par :

$$P(x) = (m + 2)x^2 + 2mx + m - 1 \quad \text{où } m \text{ est un réel.}$$

- Pour quelles valeurs de m le polynôme P est-il du second degré ?
- On suppose $m \neq -2$, Exprimer le discriminant de P en fonction de m .
- Pour quelles valeurs de m le polynôme P n'admet-il aucune racine ?
 - Pour quelle valeur de m le polynôme P admet-il une unique racine ?
Déterminer cette racine.
 - Pour quelles valeurs de m le polynôme P admet-il deux racines distinctes ?
Déterminer ces racines en fonction de m .
 - Déterminer les racines de P dans le cas où $m = 0$

Une autre

On donne l'équation :

$$(E_m) \quad x^2 + (m - 1)x - m(2m - 1) = 0$$

- Résoudre cette équation dans le cas où $m = 1$. Même question si $m = 5$
- Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles le nombre 4 est solution de l'équation (E_m) ?
- Pour quelle valeur de m l'équation (E_m) admet-elle une solution unique ?

Savoir Sd. 2: Factorisation et forme canonique

Exercice 6 : Factoriser un polynôme du 2nd degré

1) Factoriser (quand c'est possible) en utilisant discriminant et racine(s)

- a. $P(x) = -2x^2 - x + 3$ b. $Q(x) = 5x^2 - 4x + 3$
c. $R(x) = x^2 - 1 + x$ d. $S(t) = 16t^2 - 24t + 9$
e. $T(x) = 5x^2 - 2x$ f. $U(n) = 3n - n^2 - 2$

Un niveau au-dessus

Factoriser si possible en utilisant discriminant et racines

- a. $F(x) = \frac{x^2}{4} - x - 2$
b. $G(x) = -x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{5}{2}$

2) Rappel : Factoriser sans passer par le calcul du discriminant et des racines

- a. $A(x) = 4x^2 - 9$ b. $B(x) = 6x^2 + 3x$ c. $C(x) = 25x^2 + 10x + 1$ d. $D(x) = x^2 - 2$

Exercice 7 : Forme canonique

Dans chaque cas, calculer x_0 et l'image de x_0 pour mettre le polynôme sous sa forme canonique : $P = a(x - x_0)^2 + M$

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 - 4x + 9 & B(t) &= 2t^2 + 6t - 1 \\ C(x) &= 3x^2 + 18x + 30 & D(x) &= 16x^2 - 24x + 9 & E(x) &= -3x^2 + 7 \end{aligned}$$

Un niveau au-dessus

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{x^2}{2} - x + \frac{9}{2} \\ Q(x) &= -\frac{2}{3}x^2 + 5x \end{aligned}$$

Exercice 8 : Factorisation à étapes

Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= 2x^2 + 2x - 24 - (x - 3)(x + 1) & B &= (2x - 1)^2 + 2x^2 + 11x - 6 \\ C &= 4x^2 - 2x + 1 + 2(1 - x)(x + 2) & D &= x^2 + 6x - 7 - x(14 - x^2 - 5x) \end{aligned}$$

Exercice 9 : Factoriser un polynôme de degré 3 *

On définit sur $\mathbb{R}$ le polynôme suivant : $P(x) = -3x^3 + 12x^2 - 3x - 18$

- 1) Montrer que -1 est une racine de P
2) On sait qu'on peut écrire P sous la forme $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
Déterminer les coefficients a , b et c
3) En déduire l'écriture factorisée de $P(x)$ en un produit de facteur de 1^{er} degré.

Exercice 10 : Pour simplifier des fractions

Utiliser une factorisation pour simplifier les fractions suivantes (quand c'est possible...)

$$A = \frac{2x^2 + x - 3}{4x + 6} \quad B = \frac{x - 5}{-2x^2 + 6x + 20} \quad C = \frac{-x^2 + 3x - 2}{-x^2 + 3x - 3} \quad D = \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9}$$

Savoir Sd. 3: Tableau de signes du 2nd degré

Exercice 11 : Signe d'un polynôme du 2nd degré

1) Déterminer le tableau de signe des fonctions suivantes :

a. $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$ b. $g(x) = -4x^2 + 4x - 1$

c. $h(x) = x^2 + x + 1$ d. $i(x) = 2x^2 - 6x - 8$

2) Donner le signe des fonctions suivantes, à l'aide d'une phrase, en précisant les intervalles :

a. $j(x) = -2x^2 + 4x + 6$ b. $k(x) = 4x^2 - 4x - 3$

Un niveau au-dessus

Donner le tableau de signes des fonctions :

$$F(x) = -12x^2 + 2x - \frac{1}{12}$$

$$G(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{10}{3}$$

Exercice 12 : Inéquation du 2nd degré

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$ b. $6 - 3x > 3x^2$

c. $9x^2 - 6x \leq -1$ d. $2x^2 + 1 > -x$

Un niveau au-dessus

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $2x^2 - 7x + 3 \leq x^2 - 2x + 9$

b. $x^2 < \frac{1}{6}(x + 5)$

Exercice 13 : Produit ou quotient

Déterminer les tableaux de signes des expressions suivantes :

a. $A = (6 + x - x^2)(5x - 5)$ b. $B = -3(x + 4)(x^2 - 7x + 6)$ c. $C = \frac{5-x}{x^2(-x^2+4x-5)}$

Exercice 14 : Résolution d'inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\frac{3-x^2-2x}{x-1} \leq 0$ b. $(2x-1)(2+x) \geq x(x-1)$ c. $\frac{3x}{-2x+2} < \frac{x-3}{x+4}$

Exercice 15 : Avec paramètre *

On considère le polynôme défini par $R_\alpha(x) = ax^2 - 2(\alpha + 1)x + \alpha + 2$

1) Pour quelle valeur de α le polynôme R n'est-il pas un polynôme du second degré ?

2) Pour $\alpha \neq 0$, déterminer les racines de R en fonction de α .

3) On suppose $\alpha < 0$. Déterminer le signe de R en fonction de α (attention à l'ordre des racines)

CORRECTIONS

Corrections Savoir Sd. 1

Corrigé Exercice 0

1^{ère} étape :

	a	b	c
$3x^2 - 5x + 1 = 0$	3	-5	1
$0,5x^2 - x + 1,2 = 0$	0,5	-1	1,2
$x^2 - 7 = 0$	1	0	-7
$\frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2} = 0$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$

	a	b	c
$2x^2 - 4x = 0$	2	-4	0
$4x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$	4	1	$-\frac{3}{2}$
$-3x^2 + 4 = 0$	-3	0	4
$x^2 - 3x - 5 = 0$	1	-3	-5

2^{ème} étape

a) On a $a = 3; b = -5$ et $c = 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 25 - 12 = 13$$

b) On a $a = \frac{1}{4}; b = 1$ et $c = -3$

$$\Delta = (1)^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times (-3) = 1 + 3 = 4$$

c) On a $a = 3; b = 0$ et $c = -6$

$$\Delta = 0^2 - 4 \times 3 \times (-6) = 0 + 72 = 72$$

e) On a $a = 1; b = -5$ et $c = 0$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 25 - 0 = 25$$

g) On a $a = 9; b = -12$ et $c = 4$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 9 \times 4 = 144 - 144 = 0$$

h) Attention, il faut mettre dans l'ordre $\Leftrightarrow -2x^2 + x + 3 = 0$

On a $a = -2; b = 1$ et $c = 3$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25$$

3^{ème} étape

a) $a = 1; b = 4$ et $c = -5$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$ On a $\Delta > 0$ donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+6}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-6}{2 \times 1} = \frac{-10}{2} = -5 \Rightarrow S = \{-5; 1\}$$

b) Attention à l'ordre : $6x^2 - 5x + 1 = 0$

$a = 6; b = -5$ et $c = 1$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{1} = 1$ On a $\Delta > 0$ donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5)+1}{2 \times 6} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-1}{2 \times 6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right\}$$

c) $2x^2 + 2x - 1 = 0$ et $\Delta = 12$

$a = 2; b = 2$ et $c = -1$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{12}$ On a $\Delta > 0$ donc deux solutions :

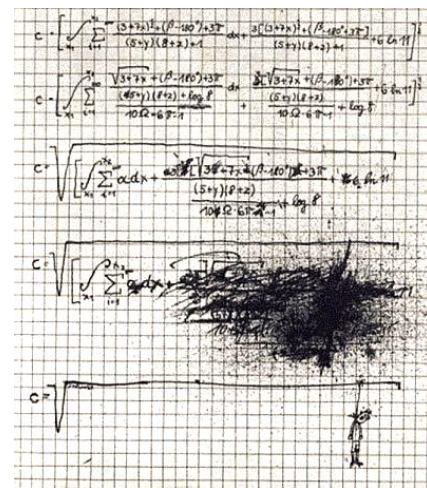
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{12}}{2 \times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right\}$$

d) $\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solutions $\Rightarrow S = \emptyset$

e) $a = \frac{1}{2}; b = -2$ et $c = 2$ et $\Delta = 0$ donc une seule solution : $x_0 = \frac{-(-2)}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

f) $a = \frac{3}{4}; b = 3$ et $c = -9$ et $\sqrt{\Delta} = \sqrt{36} = 6$ on a $\Delta > 0$ donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+6}{2 \times \frac{3}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{2}} = 3 \times \frac{2}{3} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-6}{2 \times \frac{3}{4}} = \frac{-9}{\frac{3}{2}} = -9 \times \frac{2}{3} = -6 \Rightarrow S = \{-6; 2\}$$



Corrigé Exercice 1

a) $2x^2 + 4x - 30 = 0 \Rightarrow$ On a $a = 2; b = 4$ et $c = -30$

donc $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-30) = \mathbf{256}$ et $\sqrt{256} = 16$ $\Delta > 0$ donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+16}{2 \times 2} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-16}{2 \times 2} = \frac{-20}{4} = -5 \quad \Rightarrow \quad S = \{-5; 3\}$$

b) $n^2 - 4n + 4 = 0 \Rightarrow$ On a $a = 1; b = -4$ et $c = 4$ donc $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = \mathbf{0}$

$\Delta = 0$ donc une seule solution : $n_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow S = \{2\}$

c) Ramener à zéro $\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow$ On a $a = -1; b = 2$ et $c = 3$

donc $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 3 = \mathbf{16}$ et $\sqrt{16} = 4$ $\Delta > 0$ donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-2+4}{2 \times (-1)} = \frac{2}{-2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2-4}{2 \times (-1)} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{-1; 3\}$$

d) Attention à l'ordre $4x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow$ On a $a = 4; b = -2$ et $c = 3$

donc $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 4 \times 3 = \mathbf{-44}$ donc $\Delta < 0$ il n'y a pas de solutions $\Rightarrow S = \emptyset$

e) Ramener à zéro $x^2 = 10x \Leftrightarrow x^2 - 10x = 0$

ATTENTION : N'allez pas trop vite au delta... parfois, quand il n'y a que 2 termes, ces équations se résolvent plus vite en factorisant !

$$x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(x - 10) = 0$$

équation produit nul : soit $x = 0$ soit $x - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow x = 10$$

$$\Rightarrow S = \{0; 10\}$$

Méthode classique (plus longue)

On a $a = 1; b = -10$ et $c = 0$

avec $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 0 = \mathbf{100}$

on a $\Delta > 0$ deux solutions :

$$x_1 = \frac{10+10}{2} = 10 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10-10}{2} = 0$$

f) $-x^2 - 3x + 1 = 0$ avec $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-1) \times 1 = \mathbf{13}$ on a $\Delta > 0$ deux solutions :

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{13}}{-2} = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{13}}{-2} = \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{ \frac{-3-\sqrt{13}}{2}; \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \right\}$$

g) $4y^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{24}{4} = 6$

Résolution classique d'une équation $y^2 = a$

Soit $y = \sqrt{6}$ soit $y = -\sqrt{6}$

$$\Rightarrow S = \{-\sqrt{6}; \sqrt{6}\}$$

(Avouez que c'est plus rapide)

Méthode classique

On a $a = 4; b = 0$ et $c = -24$

avec $\Delta = 0^2 - 4 \times 4 \times (-24) = \mathbf{384}$

on a $\Delta > 0$ deux solutions :

$$y_1 = \frac{0+\sqrt{384}}{8} = \frac{\sqrt{64 \times 6}}{8} = \frac{8\sqrt{6}}{8} = \sqrt{6} \quad \text{et} \quad y_2 = -\sqrt{6}$$

h) $5x = 3x^2 + 4 \Leftrightarrow -3x^2 + 5x - 4 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times (-4) = \mathbf{-23}$ $\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solutions $\Rightarrow S = \emptyset$

a) $-\frac{x^2}{2} + x + 5 = 0 \Rightarrow$ On a $a = -\frac{1}{2}; b = 1$ et $c = 5$ donc $\Delta = 1^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 5 = 1 + \frac{20}{2} = \mathbf{11}$

deux solutions : $x_1 = \frac{-1+\sqrt{11}}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1+\sqrt{11}}{-1} = 1 - \sqrt{11}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{11} \Rightarrow S = \{1 - \sqrt{11}; 1 + \sqrt{11}\}$

b) $t^2 + \frac{5}{3}t - 4 = 0 \Rightarrow$ On a $a = 1; b = \frac{5}{3}$ et $c = -4$ donc $\Delta = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = \frac{25}{9} + 16 = \frac{169}{9}$

deux solutions : $t_1 = \frac{-\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{169}{9}}}{2} = \left(-\frac{5}{3} + \frac{13}{3}\right) \div 2 = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$ et $t_2 = \left(-\frac{5}{3} - \frac{13}{3}\right) \div 2 = -\frac{18}{3} \times \frac{1}{2} = -3$

$$\Rightarrow S = \left\{-3; \frac{4}{3}\right\}$$

$$\text{c) } \Leftrightarrow \frac{4x^2}{3} - 4x + \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow \text{On a } a = \frac{4}{3}; b = -4 \text{ et } c = \frac{9}{4} \text{ donc } \Delta = (-4)^2 - 4 \times \frac{4}{3} \times \frac{9}{4} = 16 - 12 = 4 \text{ et}$$

$$\text{deux solutions : } x_1 = \frac{4+2}{2 \times \frac{4}{3}} = 6 \div \frac{8}{3} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \text{ et } x_2 = \frac{4-2}{2 \times \frac{4}{3}} = 2 \div \frac{8}{3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow S = \left\{ \frac{3}{4}; \frac{9}{4} \right\}$$

Corrigé Exercice 2

a) $2x(2x^2 - x - 15) = 0$

Soit $2x = 0$ Soit $2x^2 - x - 15 = 0$ avec $\Delta = 121$

$$x = 0 \quad x_1 = \frac{1+11}{4} = 3 \text{ ou } x_2 = \frac{1-11}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$S = \left\{ -\frac{5}{2}; 0; 3 \right\}$$

c) $(x^2 - x)(x^2 + x + 2) = 0$

Soit $x^2 - x = 0$ Soit $x^2 + x + 2 = 0$ avec $\Delta = -7$

$$x(x-1) = 0 \quad \text{pas de solution}$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$S = \{0; 1\}$$

b) $\frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 3x - 2} = 0$

Valeur interdite :

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ avec } \Delta = 1$$

$$x_1 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{3-1}{2} = 1$$

La fraction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$

Solutions : $x^2 - x - 1 = 0$ avec $\Delta = 5$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$S = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

d) $\frac{2n^2 + 4n - 6}{1 - n} = 0$

Valeur interdite : $1 - n = 0 \Leftrightarrow n = 1$

La fraction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Solutions : $2n^2 + 4n - 6 = 0$ avec $\Delta = 64$

$$n_1 = \frac{-4+8}{4} = 1 \text{ (qui est valeur interdite)}$$

$$\text{ou } n_2 = \frac{-4-8}{4} = -3$$

$$S = \{-3\}$$

Corrigé Exercice 3

a. $P(4) = -2 \times 4^3 + 7 \times 4^2 + 7 \times 4 - 12 = -2 \times 64 + 7 \times 16 + 28 - 12 = 0$

On a $P(4) = 0$ donc 4 est bien une racine du polynôme P

b. $(x-4)(-2x^2 - x + 3) = -2x^3 - x^2 + 3x + 8x^2 + 4x - 12 = -2x^3 + 7x^2 + 7x - 12 = P(x)$ **CQFD**

c. $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(-2x^2 - x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x-4=0 & \text{ou} & -2x^2 - x + 3 \\ x=4 & \text{ou} & \Delta = 25 \text{ avec } x_1 = \frac{1+5}{-4} = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1-5}{-4} = 1 \end{matrix}$

Donc $S = \left\{ -\frac{3}{2}; 1; 4 \right\}$

a. $R(1) = 2 \times 1 - 5 \times 1 + 4 \times 1 - 1 = 2 - 5 + 4 - 1 = 0$ **Donc 1 est bien une racine de R**

b. On a : $(x-1)S(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$
 $= ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

Or $R(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ donc on peut identifier les coefficients de chaque terme :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - a = -5 \\ c - b = 4 \\ -c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 2 = -5 \\ 1 - b = 4 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ -3 = b \\ c = 1 \end{cases} \text{ le système a bien une solution et } S(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

c. $R(x) = (x-1)(2x^2 - 3x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x-1=0 & \text{ou} & 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\ x=1 & \text{ou} & \Delta = 1 \text{ donc } x_1 = \frac{3+1}{4} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{matrix}$

Donc $S = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$

Corrigé Exercice 4

a. $x^2(x^2 - 2) = 3 \Leftrightarrow Y(Y - 2) = 3 \Leftrightarrow Y^2 - 2Y = 3 \Leftrightarrow Y^2 - 2Y - 3 = 0$ **CQFD**

b. $Y^2 - 2Y - 3 = 0$ On a $\Delta = 16$ donc $Y_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$ et $Y_2 = \frac{2-4}{2} = -1$

c. $Y_1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$ et $Y_2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = -1$ n'a pas de solution
Donc $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$

On pose $Y = x^2$ Alors on a : $2x^4 = 8x^2 + 10 \Leftrightarrow 2Y^2 = 8Y + 10 \Leftrightarrow 2Y^2 - 8Y - 10 = 0$

$$\Delta = 144 \Rightarrow \begin{cases} Y_1 = \frac{8+12}{4} = 5 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5} \\ Y_2 = \frac{8-12}{4} = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ pas de solutions} \end{cases} \quad \text{Donc } S = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$$

Corrigé Exercice 5

1) $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2 \Rightarrow$ pour $m \neq -2$, P est un polynôme du second degré.

2) $\Delta = (2m)^2 - 4 \times (m + 2) \times (m - 1) = 4m^2 - 4(m^2 + m - 2) = -4m + 8$

3) a. $\Delta < 0 \Leftrightarrow -4m + 8 < 0 \Leftrightarrow 4m > 8 \Leftrightarrow m > 2$

$\Rightarrow$ **Donc P n'a pas de racine pour $m \in]2; +\infty[$**

b. $\Delta = 0 \Leftrightarrow -4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

$\Rightarrow P$ n'a qu'une seule racine pour $m = 2$, on a $x_0 = \frac{-2m}{2(m+2)} = \frac{-2 \times 2}{2 \times 4} = -\frac{1}{2}$

Quand $m = 2$, P a pour unique racine $-\frac{1}{2}$

c. $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 2$

C'est-à-dire pour $m < 2$, le polynôme P deux racines : $x_1 = \frac{-2m + \sqrt{-4m+8}}{2(m+2)}$ et $x_2 = \frac{-2m - \sqrt{-4m+8}}{2(m+2)}$

d. Pour $m = 0$, on a : $x_1 = \frac{0 + \sqrt{8}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

1) $m = 1 \Rightarrow (E_1) \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow S = \{-1; 1\}$

$m = 5 \Rightarrow (E_5) \quad x^2 + 4x - 45 = 0$ on a $\Delta = 196$ et $S = \{-9; 5\}$

2) pour $x = 4$ on a $4^2 + (m - 1) \times 4 - m(2m - 1) = 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 5m + 12 = 0$

on a $\Delta = 121 \Rightarrow m_1 = -\frac{3}{2}$ et $m_2 = 4$

3) $\Delta = (m - 1)^2 - 4 \times (-m) \times (2m - 1) = 9m^2 - 6m + 1$

(E_m) admet une solution unique pour $\Delta = 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 6m + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ et $m_0 = \frac{-(-6)}{2 \times 9} = \frac{1}{3}$

Pour $m = \frac{1}{3}$ l'équation (E_m) admet une unique solution

Corrections Savoir Sd. 2

Correction Exercice 6

1) a. $P(x) = -2x^2 - x + 3$

On a $\Delta = 1 + 24 = 25 \Rightarrow x_1 = \frac{1-5}{-4} = 1$ et $x_2 = \frac{1+5}{-4} = -\frac{3}{2}$

Alors $P(x) = -2(x-1)\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right) = -2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

On pourrait distribuer le - et le 2 et obtenir $P(x) = (1-x)(2x+3)$

b. $Q(x) = 5x^2 - 4x + 3$

On a $\Delta = 16 - 60 = -44 \Rightarrow$ **Pas de factorisation possible**

c. $R(x) = x^2 + x - 1$ Attention à l'ordre des facteurs

On a $\Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Alors $R(x) = \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

d. $S(t) = 16t^2 - 24t + 9$

On a $\Delta = 576 - 576 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$

Alors $S(t) = 16\left(t - \frac{3}{4}\right)^2$

On pourrait distribuer le 16 et obtenir $S(t) = (4t-3)^2$

e. $T(x) = 5x^2 - 2x$ (ça serait bien plus rapide autrement, par factorisation naturelle...)

On a $\Delta = 4 - 0 = 4 \Rightarrow x_1 = \frac{2-2}{10} = 0$ et $x_2 = \frac{2+2}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ Alors $T(x) = 5x\left(x - \frac{2}{5}\right)$

On pourrait distribuer le 5 et obtenir $T(x) = x(5x-2)$ comme la factorisation directe par x

f. $U(n) = -n^2 + 3n - 2$ Attention à l'ordre des facteurs

On a $\Delta = 9 - 8 = 1 \Rightarrow n_1 = \frac{-3-1}{-2} = 2$ et $n_2 = \frac{-3+1}{-2} = 1$ Alors $U(n) = -(n-1)(n-2)$

On pourrait distribuer le - et obtenir par ex $U(n) = (1-n)(n-2)$

2) a. $A(x) = (2x+3)(2x-3)$: c'est un $a^2 - b^2$

b. $B(x) = 3x(2x+1)$

c. $C(x) = (5x+1)^2$ c'est un $a^2 + 2ab + b^2$ on obtiendrait un $\Delta = 0$ et une factorisation $5\left(x + \frac{1}{5}\right)^2$

d. $D(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$: c'est un $a^2 - b^2$ (et ça évite des simplifications de racines pas simples)

Correction Exercice 7

$A(x) = x^2 - 4x + 9$: On a $x_0 = \frac{4}{2} = 2$ et $A(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 9 = 5$

Alors $A(x) = 1(x-2)^2 + 5$

$B(t)$: On a $t_0 = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$ et $B\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \times \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = 2 \times \frac{9}{4} - 9 - 1 = \frac{9}{2} - 10 = -\frac{11}{2}$

Alors $B(t) = 2\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2}$

$C(x) = 3x^2 + 18x + 30$ On a $x_0 = \frac{-18}{6} = -3$ et $C(-3) = 3 \times (-3)^2 + 18 \times (-3) + 30 = 3$

Alors $C(x) = 3(x+3)^2 + 3$

a. $F(x) = \frac{x^2}{4} - x - 2$

On a $\Delta = 1 + 4 \times \frac{1}{4} \times 2 = 3$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2 \times \frac{1}{4}} = 2 - 2\sqrt{3}$

et $x_2 = 2 + 2\sqrt{3}$

$F(x) = \frac{1}{4}(x-2+2\sqrt{3})(x-2-2\sqrt{3})$

b. $G(x) = -x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{5}{2}$

On a $\Delta = \frac{81}{4} + 4 \times \frac{5}{2} = \frac{121}{4}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{\frac{9}{2} - \frac{11}{2}}{-2} = -\frac{2}{2} \div (-2) = \frac{1}{2}$

et $x_2 = \frac{\frac{9}{2} + \frac{11}{2}}{-2} = \frac{20}{2} \div (-2) = -5$

Alors $G(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+5)$

Ou $G(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right)(x+5)$

$$D(x) = 16x^2 - 24x + 9$$

$$\text{On a } x_0 = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

$$\text{et } D\left(\frac{3}{4}\right) = 16 \times \frac{9}{16} - 24 \times \frac{3}{4} + 9 = 9 - 18 + 9 = 0$$

$$\text{Alors } D(x) = 16\left(x - \frac{3}{4}\right)^2$$

Il s'agit d'un carré parfait quand l'image de x_0 est 0.

La forme factorisée est aussi la forme canonique : on aurait alors plutôt trouvé $(4x - 3)^2$

$$E(x) = -3x^2 + 7$$

C'est déjà une forme canonique : $x_0 = 0$ et $E(0) = 7$

$$P(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{9}{2}$$

$$\text{On a } x_0 = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1 \text{ et } P(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{9}{2} = 4$$

$$\text{Alors } P(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 4$$

$$Q(x) = \frac{2}{3}x^2 - 5x$$

$$\text{On a } x_0 = \frac{5}{2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)} = 5 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{15}{4}$$

$$\text{et } Q\left(-\frac{15}{4}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{225}{16} - 5 \times \frac{15}{4} = -\frac{75}{8}$$

$$\text{Alors } Q(x) = -\frac{2}{3}\left(x + \frac{15}{4}\right)^2 - \frac{75}{8}$$

Correction Exercice 8

$$A = 2x^2 + 2x - 24 - (x - 3)(x + 1)$$

1^{ère} méthode : on factorise la 1^{ère} partie

$$\text{On a } 2x^2 + 2x - 24 = 2(x - 3)(x + 4) \text{ car } \Delta = 196 ; x_1 = 3 \text{ et } x_2 = -4$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } A &= 2(x - 3)(x + 4) - (x - 3)(x + 1) = (x - 3)(2(x + 4) - (x + 1)) \\ &= (x - 3)(2x + 8 - x - 1) = (x - 3)(x + 7) \end{aligned}$$

2^{ème} méthode : on développe avant de factoriser

$$A = 2x^2 + 2x - 24 - (x^2 + x - 3x - 3) = 2x^2 + 2x - 24 - x^2 - x + 3x + 3 = x^2 + 4x - 21$$

$$\text{On a } \Delta = 100 ; x_1 = 3 \text{ et } x_2 = -7 \text{ donc } A = (x - 3)(x + 7)$$

$$B = (2x - 1)^2 + 2x^2 + 11x - 6$$

$$\text{On a } 2x^2 + 11x - 6 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 6) = (2x - 1)(x + 6) \text{ car } \Delta = 169 ; x_1 = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = -6$$

$$\text{Donc } B = (2x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 6) = (2x - 1)(2x - 1 + x + 6) = (2x - 1)(3x + 5)$$

$$C = 4x^2 - 2x + 1 + 2(1 - x)(x + 2)$$

$$C = 4x^2 - 2x + 1 + 2(x + 2 - x^2 - 2x) = 4x^2 - 2x + 1 + 2x + 4 - 2x^2 - 4x = 2x^2 - 4x + 5$$

On a $\Delta = -24$ ce n'est pas factorisable...

$$D = x^2 + 6x - 7 - x(14 - x^2 - 5x)$$

$$\text{Pour } x^2 + 6x - 7, \text{ on a } \Delta = 64 ; x_1 = 1 \text{ et } x_2 = -7 \text{ donc } x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7)$$

$$\text{Pour } -x^2 - 5x + 14, \text{ on a } \Delta = 81 ; x_1 = -7 \text{ et } x_2 = 2 \text{ donc } -x^2 - 5x + 14 = -(x + 7)(x - 2)$$

$$D = (x - 1)(x + 7) - x(-(x + 7)(x - 2)) = (x + 7)(x - 1 + x(x - 2)) = (x + 7)(x^2 - x - 1)$$

$$\text{Essayons encore de factoriser } x^2 - x - 1 \text{ avec } \Delta = 5 ; x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Au final : } D = (x + 7)\left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

Correction Exercice 9

$$1) P(1) = -3 + 12 - 3 - 18 = 0 \text{ On a bien } -1 \text{ racine de } P$$

$$2) P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (b + a)x^2 + (c + b)x + c$$

$$\text{Or } P(x) = -3x^3 + 12x^2 - 3x - 18 \text{ on peut identifier } \begin{cases} a = -3 \\ b + a = 12 \\ c + b = -3 \\ c = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b - 3 = 12 \\ -18 + b = -3 \\ c = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 15 \\ b = 15 \\ c = -18 \end{cases}$$

$$\text{On a } P(x) = (x + 1)(-3x^2 + 15x - 18)$$

$$3) \text{ Pour } -3x^2 + 15x - 18, \text{ on a } \Delta = 9 ; x_1 = 2 \text{ et } x_2 = 3 \text{ donc } P(x) = -3(x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

Correction Exercise 10

$$A = \frac{2x^2 + x - 3}{4x + 6}$$

Pour $2x^2 + x - 3 \Rightarrow \Delta = 25$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{3}{2}$

Donc :

$$A = \frac{2x^2 + x - 3}{4x + 6} = \frac{2(x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{4\left(x-\frac{3}{2}\right)} = \frac{x-1}{2}$$

$$C = \frac{-x^2 + 3x - 2}{-x^2 + 3x - 3}$$

Pour $-x^2 + 3x - 2 \Rightarrow \Delta = 1$; $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

Pour $-x^2 + 3x - 3 \Rightarrow \Delta = -3$ est donc non factorisable

$$C = \frac{-(x-1)(x-2)}{-x^2 + 3x - 3}$$

$$B = \frac{x-5}{-2x^2 + 6x + 20}$$

Pour $-2x^2 + 6x + 20 \Rightarrow \Delta = 196$; $x_1 = -1$ et $x_2 = 5$ Donc :

$$B = \frac{x-5}{-2(x+1)(x-5)} = \frac{1}{-2(x+1)}$$

$$D = \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9}$$

Pour $2x^2 + 2x - 24 \Rightarrow \Delta = 196$; $x_1 = 3$ et $x_2 = -4$

Et $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ (identité remarquable)

Donc

$$D = \frac{2x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9} = \frac{2(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2(x+4)}{x+3}$$

Corrections Savoir Sd. 3

Corrigé Exercice 11

1) a. $f(x) = -2x^2 + 5x - 3$

On a $\Delta = 1$; $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{3}{2}$

Du signe de a , ici négatif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

c. $h(x) = x^2 + x + 1$

On a $\Delta = -3$ Pas de racines : le polynôme est de signe constant, celui de a , ici positif

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	+	

2) a. $j(x) = -2x^2 + 4x + 6$

On a $\Delta = 64$; $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$

Du signe de a , ici négatif, à l'extérieur des racines

Donc j est **négative sur** $]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$ et **positive sur** $[-1; 3]$

b. $g(x) = -4x^2 + 4x - 1$

On a $\Delta = 0$; $x_0 = \frac{1}{2}$ Du signe de a , ici négatif

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	-

d. $i(x) = 2x^2 - 6x - 8$

On a $\Delta = 100$; $x_1 = 4$ et $x_2 = -1$

Du signe de a , ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$i(x)$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

b. $k(x) = 4x^2 - 4x - 3$

On a $\Delta = 64$; $x_0 = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3}{2}$

Du signe de a , ici positif, à l'extérieur des racines

Donc k est **négative sur** $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ et **positive sur** $]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

$$F(x) = -12x^2 + 2x - \frac{1}{12}$$

On a $\Delta = 0$; $x_0 = \frac{1}{12}$ Du signe de a , ici négatif

x	$-\infty$	$\frac{1}{12}$	$+\infty$
$F(x)$	$-$	0	$-$

$$G(x) = \frac{1}{3}x^2 - x - \frac{10}{3}$$

On a $\Delta = \frac{49}{9}$; $x_1 = -2$ et $x_2 = 5$

Du signe de a , ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$G(x)$	$+$	$\mathbf{0}$	$-\mathbf{0}$	$+$

Corrigé Exercice 12

a. $2x^2 + 3x - 5 \geq 0$

On a $\Delta = 49$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{5}{2}$

Du signe de a , ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	1	$+\infty$	
$2x^2 + 3x - 5$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S =]-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [1; +\infty[$$

c. $9x^2 - 6x \leq -1 \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

On a $\Delta = 0$; $x_0 = \frac{1}{3}$

Du signe de a , ici positif

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$9x^2 - 6x + 1$	$+$	0	$+$

$$S = \left\{\frac{1}{3}\right\} \quad (\text{partout positif, on veut les négatifs ou les zéros... ne reste que le zéro})$$

b. $6 - 3x > 3x^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 6 < 0$

On a $\Delta = 81$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

Du signe de a , ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$3x^2 + 3x - 6$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S =]-2; 1[$$

d. $2x^2 + 1 > -x \Leftrightarrow 2x^2 + x + 1 > 0$

On a $\Delta = -7$ Du signe de a , ici positif

x	$-\infty$	$+\infty$
$2x^2 + x + 1$	$+$	

$$S = \mathbb{R} \quad (\text{elle est partout positive et on veut les positifs})$$

a. $2x^2 - 7x + 3 \leq x^2 - 2x + 9$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 6 \leq 0$$

On a $\Delta = 49$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -6$

Du signe de a , ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$	-6	1	$+\infty$	
$2x^2 - 7x + 3$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$S =]-\infty; -6] \cup [1; +\infty[$$

b. $x^2 < \frac{1}{6}(x + 5) \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{5}{6} < 0$

Pour les équations et les inéquations, une bonne façon de se « débarrasser » des fractions, c'est de multiplier chaque terme par un facteur bien choisi : Ici, par exemple par 6 $\Leftrightarrow$

$$6x^2 - 6 \times \frac{1}{6}x - 6 \times \frac{5}{6} > 6 \times 0$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - x - 5 > 0$$

On a $\Delta = 121$; $x_1 = 1$ et $x_2 = -\frac{5}{6}$

Du signe de a , ici positif, à l'extérieur des racines

x	$-\infty$	$-\frac{5}{6}$	1	$+\infty$
$2x^2-7x+3$	$+$	$\mathbf{0}$	$-\mathbf{0}$	$+$

$$S =]-\frac{5}{6}; 1[$$

Corrigé Exercice 13

a. $A = (6 + x - x^2)(5x - 5)$

Pour $-x^2 + x + 6$ on a $\Delta = 25$

avec $x_1 = -2$ et $x_2 = 3$

Du signe de a à l'extérieur des racines, ici négatif

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$		
$-x^2 + x + 6$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	0	$-$
$5x - 5$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
A	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$

b. $B = -3(x + 4)(x^2 - 7x + 6)$

Pour $x^2 - 7x + 6$ on a $\Delta = 25$

avec $x_1 = 1$ et $x_2 = 6$

Du signe de a à l'extérieur des racines, ici positif

x	$-\infty$	-4	1	6	$+\infty$
-3	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$
$x + 4$	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$x^2 - 7x + 6$	$+$	$ $	$+$	0	$+$
B	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$+$

c. $C = \frac{5-x}{x^2(-x^2+4x-5)}$

Pour $x^2 + 4x + 5$ on a $\Delta = -4$

Pas de racines

Du signe de a partout, ici négatif

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$		
$5-x$		$+$	$ $	$+$	0	$-$
x^2		$+$	0	$+$	$ $	$+$
x^2+4x+5		$-$	$ $	$-$	$ $	$-$
A		$-$	$ $	$-$	0	$+$

Corrigé Exercice 14

a. $\frac{3-x^2-2x}{x-1} \leq 0$

Pour $-x^2 - 2x + 3$ on a $\Delta = 16$

avec $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$

Du signe de a à l'extérieur des racines, ici négatif

$$S = [-3; 1[$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$		
$-x^2 - 2x + 3$		$-$	0	$+$	0	$-$
$x - 1$		$-$	$ $	$-$	0	$+$
Quotient		$+$	0	$-$	$ $	$+$

b. $(2x - 1)(2 + x) \geq x(x - 1)$

Pas de factorisation en vue, on développe

$$\Leftrightarrow 4x + 2x^2 - 2 - x \geq x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x - 2 \geq 0$$

on a $\Delta = 24$ avec $x_1 = \frac{-4-\sqrt{24}}{2} = -2 - \sqrt{6}$

et $x_2 = -2 + \sqrt{6}$

Du signe de a à l'extérieur des racines, ici positif

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{6}$	$-2 + \sqrt{6}$	$+\infty$	
$x^2 + 4x - 2$	$+$	$\mathbf{0}$	$-$	$\mathbf{0}$	$-$

$$S =] - \infty; -2 - \sqrt{6}[\cup] -2 + \sqrt{6}; +\infty[$$

c. $\frac{3x}{-2x+2} < \frac{x-3}{x+7}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{-2x+2} - \frac{x-3}{x+7} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x(x+7) - (-2x+2)(x-3)}{(-2x+2)(x+7)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2 + 21x - (-2x^2 + 6x + 2x - 6)}{(-2x+2)(x+7)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2 + 13x + 6}{(-2x+2)(x+7)} < 0$$

Pour $5x^2 + 13x + 6$ on a $\Delta = 49$; $x_1 = -\frac{3}{5}$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-7	-2	$-\frac{3}{5}$	1	$+\infty$			
$5x^2 + 13x + 6$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$-2x + 2$	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$	0	$-$		
$x + 7$	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$		
Quotient	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$-$

$$S =] - \infty; -7[\cup] -2; -\frac{3}{5}[\cup] 1; +\infty[$$

Corrigé Exercice 15

1) Pour $\alpha = 0$, le terme αx^2 s'annule et on a $R_0(x) = -2x + 2$ qui est un polynôme du 1^{er} degré

2) Pour $\alpha \neq 0$, on a $\Delta = (-2(\alpha + 1))^2 - 4\alpha(\alpha + 2) = 4(\alpha^2 + 2\alpha + 1) - 4\alpha^2 - 8\alpha = 4$

$$\text{Alors } x_1 = \frac{2(\alpha+1)-2}{2\alpha} = \frac{2\alpha+2-2}{2\alpha} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{2(\alpha+1)+2}{2\alpha} = \frac{2\alpha+4}{2\alpha} = \frac{\alpha+2}{\alpha}$$

On a donc comme racines **1** et $\frac{\alpha+2}{\alpha}$

3) Si $\alpha < 0$, alors $\frac{\alpha+2}{\alpha} = 1 + \frac{2}{\alpha} < 1$.

Le polynôme R_α est du signe de α à l'extérieur de ses racines, donc ici négatif.

x	$-\infty$	$\frac{\alpha+2}{\alpha}$	1	$+\infty$
$R_\alpha(x)$	-	0	+	0 -