

1^{er} sujet : CORRECTIONS

Corrigé Exercice 1

1. Les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles car elles ne sont même pas coplanaires : en effet, par exemple, le point A n'appartient pas au plan (KIH)

2. a. $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ et $J\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$

b. $\vec{IJ}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{AE}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ On voit que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{AE} \Rightarrow$ les 3 vecteurs sont bien coplanaires

3. a. Le plan (IJA) passe par le point A(0; 0; 0) est a pour vecteurs directeurs $\vec{AI}\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ et $\vec{IJ}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -1\right)$

Une représentation paramétrique de (IJA) est :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t' \\ y = \frac{1}{2}t' \\ z = t - t' \end{cases}, t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R}$$

b. On a $G(1; 1; 0), K\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ et $\vec{KG}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Une représentation paramétrique de (KG) est :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2}t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$$

4. d_1 a comme vecteur directeur $\vec{u}_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et d_2 a comme vecteur directeur $\vec{u}_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Or $\frac{x_{\vec{u}_1}}{x_{\vec{u}_2}} = 1$ et $\frac{y_{\vec{u}_1}}{y_{\vec{u}_2}} = -2$ donc $\frac{x_{\vec{u}_1}}{x_{\vec{u}_2}} \neq \frac{y_{\vec{u}_1}}{y_{\vec{u}_2}}$

Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles

Corrigé Exercice 2

1. $u_1 = 0,75 \times 900 + 12 = 687$ et $u_2 = 0,75 \times 687 + 12 = 527,25$, soit environ 527 adhérents au 1^{er} mars 2017.

2. a. On a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 48 = 0,75u_n + 12 - 48 = 0,75(v_n + 48) - 36 = 0,75v_n + 36 - 36 = 0,75v_n$.
 $v_{n+1} = 0,75v_n$ pour tout n donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

b. $v_0 = u_0 - 48 = 852$ donc $v_n = 852 \times 0,75^n$.

c. On a : $u_n = v_n + 48$ donc $u_n = 852 \times 0,75^n + 48$.

3. On cherche n tel que $u_n \leq 100$. À la calculatrice, on trouve $u_9 \simeq 112$ et $u_{10} \simeq 96$

On a donc $u_n \leq 100$ pour $n \geq 10$: la présidente démissionnera donc au bout de 10 mois.

4. On a $\lim_{n \rightarrow \infty} 0,75^n = 0$ car $0,75 \in]-1; 1[$ donc, par somme de limites, $\lim_{n \rightarrow \infty} 852 \times 0,75^n + 48 = 48$

Au bout d'un temps assez long, le nombre d'adhérents va se stabiliser autour de 48 adhérents

Corrigé Exercice 3

Partie A

1. a. $f'(-3) = 0$ b. $f(0) = 2$ et $f'(0) = -3$.

2. a. $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+b) \times (-e^{-x}) = (1-x-b)e^{-x}$

b. $f(0) = 2 \Leftrightarrow a + (0+b)e^0 = 2 \Leftrightarrow a+b=2$

et $f'(0) = -3 \Leftrightarrow (1-0-b)e^0 = -3 \Leftrightarrow 1-b = -3 \Rightarrow$ On a bien le système $\begin{cases} a+b=2 \\ 1-b=-3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a+b=2 \\ 1-b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ 1+3=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+4=2 \\ b=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2-4=-2 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -2 + (x+4)e^{-x}$

Partie B

1. D'après la question (1a) on a $f'(x) = (1-x-b)e^{-x} = (1-x-4)e^{-x} = (-x-3)e^{-x}$

(Vous pouvez aussi dériver la fonction donnée sans les a et b)

x	-4	-3	3
$-x-3$	+	0	-
e^{-x}	+		+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-2 ↗	$-2+e^3$	↘ $-2+7e^{-3}$

2. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-3; 3]$ avec $f(-3) \approx 18 > 0$ et $f(3) \approx -1,7 < 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3; 3]$

Valeur approchée à 0,01 près par défaut : $\alpha \approx 0,89$ car $f(0,89) \approx 0,008 > 0$ et $f(0,90) \approx -0,008 < 0$

Corrigé Exercice 4

Question 1. Réponse c. $f'(0) = 15$ car (AB) tangente à $\mathcal{C}_f$ est de coefficient directeur 15

Question 2. Réponse a. $a = 10$ et $b = 5$ car on a $f(0) = 5$ donc $(a \times 0 + b)e^0 = 5 \Leftrightarrow b = 5$

et $f(-0,5) = 0 \Leftrightarrow (-0,5a + 5)e^{-0,5} = 0$

comme l'exponentielle est strictement positive, $\Leftrightarrow -0,5a + 5 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{-0,5} = 10$

Question 3 : Réponse b. $M_2(11; -9; -22)$ résolution du système pour $t = 5$

Question 4 : Réponse d. confondues : Les vecteurs directeurs sont $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

On a $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\vec{u}$ ils sont donc colinéaires, les droites sont parallèles.

Mais on remarque que $B \in \mathcal{D}'$ (pour $t = 1$) Donc avec un point commun, les droites sont confondues