

Entraînement bac du vendredi - 14 janvier

Exercice n°1 - Suites et récurrences (ancien bac)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. On considère l'algorithme suivant :

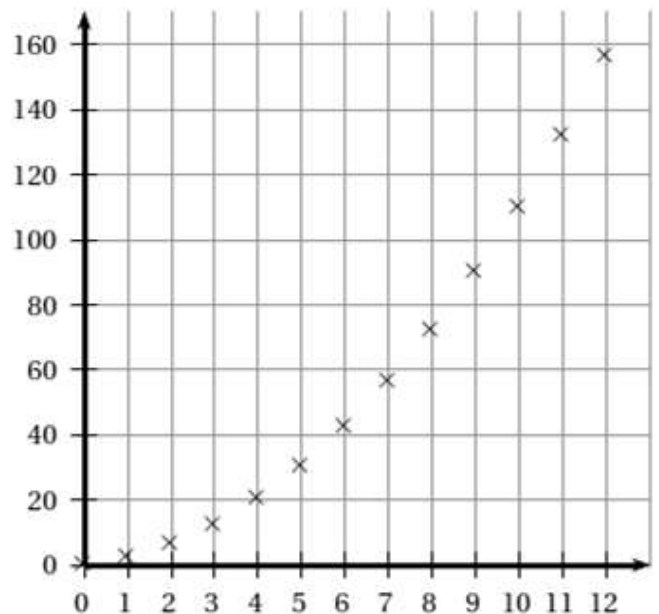
Donner la valeur numérique renvoyée par cet algorithme lorsqu'on appelle la fonction `seuil()`.

```
def seuil() :  
    u=0  
    n=0  
    while u<200 :  
        u=u+2*n+2  
        n=n+1  
    return n
```

3. À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le nuage de points ci-contre, où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de 3 réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n , $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.



4. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par $v_n = u_{n+1} - u_n$

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit pour tout entier naturel n ,

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = (n+1)(n+2)$

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = u_{n+1} - u_0$ puis exprimer u_n en fonction de n .

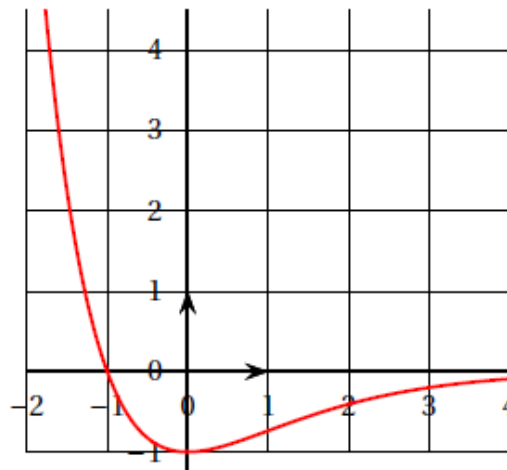
Exercice n°2 - Fonctions et convexité (Métropole juin 21 - 2)

Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la dérivée f' de la fonction f .

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1.
 - a. Montrer que, pour tout nombre réel x , $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$
 - b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
 - c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2; -1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
2.
 - a. Déterminer, pour tout nombre réel x , l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f .
 - b. Que représente pour la courbe $\mathcal{C}$ son point A d'abscisse 0?

Exercice n°3 - Probabilités (Métropole juin 21 - 2)

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième. La leucose féline est une maladie touchant les chats; elle est provoquée par un virus.

Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40% la proportion de chats porteurs de la maladie.

On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire. Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90% des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85% des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie »;
- T : « Le test du chat est positif »;
- $\bar{M}$ et $\bar{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1. a. Traduire la situation par un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.

c. Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.

d. On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.

2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.

a. Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X .

b. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.

c. Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.

d. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait plus de deux chats présentant un test positif dans cet échantillon.

Quel nombre n de chat faut-il prendre dans l'échantillon pour que la probabilité p_n dépasse les 99 % ?