

Corrigé Exercice 1

1) a) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-6)^2} = \sqrt{38}$
 et $\|\vec{AC}\| = AC = \sqrt{(6)^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{46}$

b) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times 6 + 1 \times (-3) + (-6) \times (-1) = 6 - 3 + 6 = 9$
 et $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 - 4 - 30 = -29$

2) a) Dans le triangle EFG , (IJ) est la droite des milieux et donc $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{EG} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

Les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires et de même sens. Donc : $\vec{AC} \cdot \vec{IJ} = \vec{AC} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{AC}\right) = \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = 1$

$\vec{AH} \cdot \vec{CB} = (\vec{AD} + \vec{DH}) \cdot \vec{CB} = \vec{AD} \cdot \vec{CB} + \vec{DH} \cdot \vec{CB} = \vec{BC} \cdot \vec{CB} + \vec{CG} \cdot \vec{CB} = -BC^2 + 0 = -1$
 car les côtés $[CB]$ et $[GC]$ sont perpendiculaires

et $\vec{EG} \cdot \vec{CB} = (\vec{EF} + \vec{FG}) \cdot \vec{CB} = \vec{EF} \cdot \vec{CB} + \vec{FG} \cdot \vec{CB} = \vec{AB} \cdot \vec{CB} + \vec{BC} \cdot \vec{CB} = -1$ Comme précédemment.

b) Dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$, on a $A(0; 0; 0)$; $I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$; $B(1; 0; 0)$ et $J\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$

Donc $\vec{AI} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{BJ} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ on a alors $\vec{AI} \cdot \vec{BJ} = 0 + 0 + 1 = 1$

Corrigé Exercice 2

1) a) On a $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ donc $9 = \sqrt{38} \times \sqrt{46} \times \cos \widehat{BAC}$,
 donc $\cos \widehat{BAC} = \frac{9}{\sqrt{1748}}$ et $\widehat{BAC} = \cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{1748}}\right) \approx 77,6^\circ$

(attention à bien mettre la calculatrice en degré et non en radian)

b) On a : $BC = \sqrt{25 + 16 + 1} = 4\sqrt{2}$ et $\vec{BC} \cdot \vec{BM} = BC \times BM \cos \widehat{CBM} = 4\sqrt{2} \times BM \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a donc : $2\sqrt{6} \times BM = 5 \Rightarrow BM = \frac{5}{2\sqrt{6}}$.

2) a) On a $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $AC = AH = \sqrt{2}$ et $\vec{AC} \cdot \vec{AH} = 1$.

On a donc $\cos \widehat{CAH} = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{AH}}{AC \times AH} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{CAH} = 45^\circ$.

b) On a $\vec{JI} \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$ et $\vec{JK} \left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ donc $JI = JK = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\vec{JI} \cdot \vec{JK} = -\frac{1}{4}$.

Ainsi on obtient : $\cos \widehat{IJK} = \frac{\vec{JI} \cdot \vec{JK}}{JI \times JK} = -\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. On a donc $\widehat{IJK} = 120^\circ$.

(Remarque : en admettant que les points I, J, K, L, M et N sont coplanaires, et en obtenant le même résultat pour les angles $\widehat{JKL}, \widehat{KLM}$, etc., on montre alors que $IJKLMN$ est un hexagone régulier...)

Corrigé Exercice 3

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times (-3) + 12 \times 5 + 2 \times 7 = -12 + 60 + 14 = 62 \neq 0$ Les vecteurs ne sont **pas orthogonaux**

2) $\vec{n} \cdot \vec{s} = 2k - 2k + k(k - 1) = +k(k - 1)$

$\vec{n}$ et $\vec{s}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow k(k - 1) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ ou $k = 1$

Les vecteurs sont orthogonaux pour les valeurs $k = 0$ et $k = 1$

3) Il en existe une infinité, on cherche un triplet $(x; y; z)$ tel que $-2x + 3y + z = 0$

Fixez x puis y et calculez le z qui correspond.

Par exemple $x = 0, y = 1$ et $z = -3 \Rightarrow$ Le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{w}$

4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2y - 2x - 12$ Or $\vec{a}$ et $\vec{b}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2y - 2x - 12 = 0$

Il y a une infinité de solutions : il suffit de fixer une valeur pour x et de calculer la valeur de y qui correspond :

Par exemple : $x = 0; y = 6$ ou $x = 1; y = 7$ etc....

Corrigé Exercice 4

1) a) La droite d a pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et la droite d' a pour vecteur directeur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 3 - 5 = 0 \Rightarrow$ Les vecteurs directeurs sont orthogonaux, donc les **droites sont orthogonales**.

b) On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -9 - 1 + 10 = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc **les droites (AB) et (AC) sont orthogonales**, et, comme elles passent par le même point A, **elles sont perpendiculaires**

c) On a $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = 3 + 6 + 0 = 9 \neq 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux, donc **les droites (EF) et (EG) ne sont pas orthogonales**.

d) La droite d a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; 3; -1)$ et la droite (PM) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{PM}(0; 1; 3)$

Or $\vec{u} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 + 3 - 3 = 0$ Les vecteurs directeurs sont orthogonaux, donc les **droites sont orthogonales**.

Pour savoir si elles sont perpendiculaires, il faut trouver un point commun, et, avant de se lancer dans des calculs compliqués, on essaie de voir si les points P ou M n'appartiendraient pas à la droite d (c'est souvent pour ça qu'on les donne...)

Vérifions que P est un point de la droite d : on essaie de résoudre
$$\begin{cases} -1 = -2 + t \\ 3 = 3t \\ 0 = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = t \\ 1 = t \\ t = 1 \end{cases}$$

Donc les droites d et (PM) ont le point P en commun : **elles sont donc perpendiculaires**

2) a) On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A.

b) On a : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos \widehat{ABC}$ avec $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{3}{4} + 0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

mais aussi $BA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ et $BC = \sqrt{\frac{9}{4} + 16 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{37}{2}}$

On a donc : $\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{37}{2}} \times \cos \widehat{ABC} \Leftrightarrow \cos \widehat{ABC} = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{37}}{2} = \frac{1}{\sqrt{37}} \Rightarrow \widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{37}}\right) \approx 81^\circ$

(attention à bien mettre la calculatrice en degré et non en radian 😊)

3) $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

Or la face ABCD est un carré, donc les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires, et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

On a donc $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow$ **Les droites (EC) et (BD) sont orthogonales**

$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG}$

Or BCFG est un carré, donc les diagonales (BG) et (FC) sont perpendiculaires, et $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$

On a donc $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG}$ et comme la droite (EF) est perpendiculaire à la face BCGF, elle est

orthogonale à (BG) on a donc $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 \Rightarrow$ **Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales**

La droite (EC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BDG), elle est donc **orthogonale au plan (BDG)**

4) a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos \widehat{ABC}$ or le tétraèdre est régulier, donc les faces sont des triangles équilatéraux, et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$. On a alors $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -BA \times BD \times \cos \widehat{ABD} = -\frac{1}{2}$ pour les mêmes raisons que le calcul précédent.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Donc les **droites (AB) et (CD) sont bien orthogonales**