

Savoirs Fle. 1 : Propriétés de l'exponentielle

Exercice 1 : Applications des formules

1) Inverse $e^{-A} = \frac{1}{e^A}$

- Transformer l'exponentielle en inverse :

a) e^{-1} b) e^{-3x} c) e^{x-4} d) e^{-x-1}

- Transformer l'inverse en exponentielle simple :

h) $\frac{1}{e^{2x}}$ i) $\frac{1}{e^2}$ j) $\frac{1}{e^{-2x-1}}$ k) $\frac{1}{e^{x-4}}$

2) Produits et quotients $e^{A+B} = e^A \times e^B$ et $e^{A-B} = \frac{e^A}{e^B}$

- Transformer l'exponentielle en produit ou quotient :

a) e^{3x+2} b) e^{1-3x} c) e^{x^2+x} d) e^{x-3x^2}

- Transformer le produit/quotient en exponentielle simple :

h) $e^x \times e^2$ i) $\frac{e^{2x}}{e}$ j) $e^{x^2-1} \times e^{2-x}$ k) $\frac{e^{x-3}}{e^{4+x}}$

3) Puissances $e^{nA} = (e^A)^n$

- Transformer l'exponentielle en puissance :

a) e^{2x} b) e^{3x^2} c) e^{-3} d) e^{3x+3}

- Transformer la puissance en exponentielle simple :

h) $(e^x)^5$ i) $(e^{x+2})^3$ j) $\left(\frac{1}{e^x}\right)^2$ k) $(4e^x)^2$

Un peu plus...

- Exponentielle $\Rightarrow$ inverse :

e) e^{-2} f) e^{-x} g) e^{1-2x}

- Inverse $\Rightarrow$ exponentielle :

l) $\frac{1}{e^3}$ m) $\frac{1}{e^{x+2}}$ n) $\frac{1}{e^{-0,5x+1}}$

- Exponentielle $\Rightarrow$ produit/quotient

e) e^{4x-1} f) e^{x^2+2} g) e^{1-x}

- Produit/quotient $\Rightarrow$ exponentielle

l) $e^x e^{2x}$ m) $\frac{e^x}{e^{2x^2}}$ n) $e^{x+2} e^{3-x}$

- Exponentielle $\Rightarrow$ puissance

e) e^{-3x} f) $e^{0,5x^2}$ c) e^{2x+4}

- Puissance $\Rightarrow$ exponentielle

l) $(e^{-x})^4$ m) $(e^{4-x})^3$ n) $(e^{2x})^3$

Exercice 2 : Tout mélangé

Simplifier au mieux les expressions suivantes.

$$E = e^5 \times e^{-2}$$

$$F = \frac{e^{x+2}}{e^2}$$

$$G = e^x \times e$$

$$H = e^x e^{x-1}$$

$$I = \frac{e^{-4}}{(e^3)^{-2}}$$

$$J = \frac{e^{x+2}}{e^{-x}}$$

$$K = \frac{1}{e^{1-x}} \times e^x$$

$$L = (e^x)^3 e^{-4x}$$

$$M = \frac{e^{2x+e^x}}{e^x}$$

$$N = e^{2x-1} \times e^{-3x+2}$$

$$P = \frac{e^{-3x^2+x+1}}{e^{x+1}}$$

Un peu plus...

$$A = \frac{e^{3x} \times e^{-1}}{e^{x-3}}$$

$$B = (2e^x)^3 \times e^{-3x}$$

$$C = \frac{e^{-4x}}{(e^{2-3x})^2}$$

Exercice 3 : Développement et factorisation

1) Développer :

$$f(x) = e^x(3e^{-x} + e^{3x})$$

$$g(x) = (e^{-x} + 1)(e^x - 1)$$

$$h(x) = (e^x + e^{-x})^2 - e^x(e^x + e^{-3x}) \quad i(x) = (e^x + 1)^2 - (e^{-x} - 1)^2$$

2) Transformer en puissances, puis factoriser: $E = e^{2x} + 3e^x$

$$F = 4e^{2x} + 4e^x + 1 \quad G = e^{2x} - 1 \quad H = xe^x - e^{3x}$$

Un peu plus...

1) Développer :

$$j(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2$$

$$k(x) = (e^x - e^{-x})(e^{2x} + e^x + 1)$$

2) Factoriser :

$$a(x) = 2e^{-3x} - e^{-2x}$$

$$b(x) = x^2e^x - 3xe^{2x}$$

Exercice 4 : Démonstrations d'égalités

1) a. On donne $A = xe^{-x}$ et $B = (x+1)e^{-\frac{x}{2}}$. Montrer que $B^2 - 2A = \frac{x^2+1}{e^x}$

b. On donne $f(x) = e^x + e^{2x}$ et $g(x) = e^x - e^{-2x}$

Montrer que $f(x) - g(x) = \frac{1+e^{4x}}{e^{2x}}$ et $f(x)g(x) = \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)(e^{3x} - 1)$

2) Montrer que, quel que soit le réel x , on a : $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$

Un peu plus...

1) On donne $A = \frac{e^x}{1-e^x}$

Montrer que :

$$\left(\frac{1}{A+1}\right)^2 = e^x(e^x + e^{-x} - 2)$$

2) Montrer que, quel que soit le réel x , on a :

$$\frac{1+e^{2x}}{1-e^x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x} - 1}$$

Exercice 5 : Avec dérivées

On définit pour tout réel $x > 0$, la fonction f par :

$$f(x) = 7 - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$1 + (f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2$$

Un peu plus...

On définit pour $x \geq 0$ la fonction g par :

$$g(x) = e^x + e^{-x} - 4x - 2$$

Montrer qu'on a, pour tout $x \geq 0$, l'équivalence suivante :

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 1 = 0$$

Exercice 6 : Comment ça des suites ?

La suite (a_n) est la suite arithmétique de premier terme $a_0 = 2$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel n , on pose : $b_n = e^{-a_n}$. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique.