

# Savoir Vps. 6 : Produit scalaire - Calculs

## Exercice 6 : Calcul de produits scalaire

1) Dans une base  $(\vec{i}; \vec{j})$ , on donne  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  ;

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \text{ et } \vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$$

Calculer : a.  $\vec{u} \cdot \vec{v}$     b.  $\vec{a} \cdot \vec{b}$     c.  $\vec{u}^2$     d.  $\|\vec{b}\|$

2) On donne  $A(-5; 1)$ ,  $B(-3; -4)$  ;  $C(2; 5)$  et  $D(1; -6)$ . Calculer :

a.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$     b.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$     c.  $\overrightarrow{CB}^2$     d.  $DC$

## Exercice 7 : Orthogonalité dans un repère

1) On donne  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

- a. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont-ils orthogonaux ?  
b. Et les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  ?

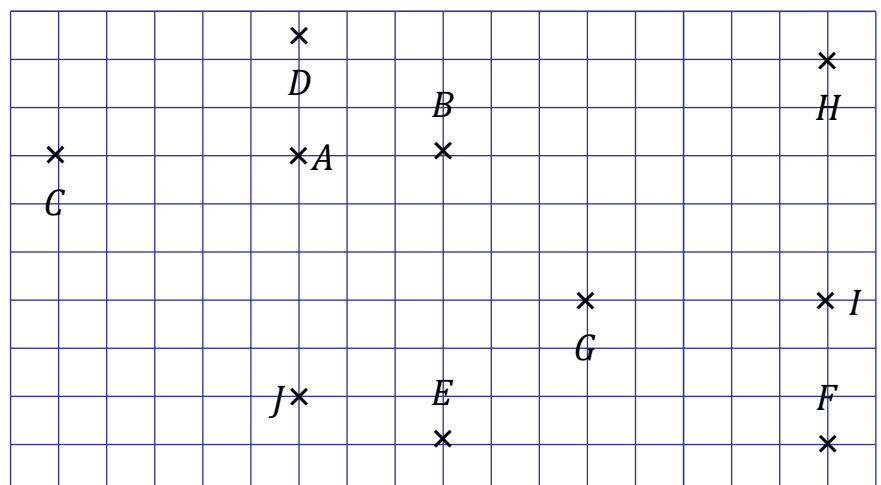
2) On a  $E(4; -5)$ ;  $F(-2; 7)$ ;  $G(-3; -6)$  et  $H(7; -1)$

- a. Les vecteurs  $\overrightarrow{EF}$  et  $\overrightarrow{GH}$  sont-ils orthogonaux ?  
b. Même question pour  $\overrightarrow{FG}$  et  $\overrightarrow{HE}$

## Exercice 8 : « Rappels » sur les projetés orthogonaux

Construire les projetés orthogonaux suivants (s'il s'agit d'un point déjà défini, préciser ce point)

- a.  $M$  = projeté de  $D$  sur  $(CB)$   
b.  $N$  = projeté de  $G$  sur  $(AJ)$   
c.  $P$  = projeté de  $C$  sur  $(GI)$   
d.  $Q$  = projeté de  $F$  sur  $(BE)$   
e.  $R$  = projeté de  $B$  sur  $(EH)$   
f.  $S$  = projeté de  $F$  sur  $(IH)$   
g.  $T$  = projeté de  $I$  sur  $(GH)$



## Besoin de plus d'entraînement ?

1) On donne  $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculer : a.  $3\vec{u} \cdot 5\vec{v}$     b.  $\vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$   
c.  $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + 3\vec{w})$

2) On donne  $M(-5; 1)$ ,  $A(-3; -4)$  ;  $T(2; 5)$  et  $H(1; 6)$ . Calculer :

a.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MT}$     b.  $\|\overrightarrow{TH}\|$     c.  $\overrightarrow{TA}^2$

## Besoin de plus d'entraînement ?

On donne dans une base  $(\vec{i}; \vec{j})$  :

$\vec{a} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$  ;  $\vec{b} = -3\vec{i} + 12\vec{j}$  ;  $P(-1; 7)$  et  $S(0; 2)$

- a. Les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont-ils orthogonaux ?  
b. Et les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\overrightarrow{PS}$  ?

## Exercice 9 : Produit scalaire avec projeté orthogonal

1) a. Déterminer la longueur de la diagonale d'un petit carré de quadrillage

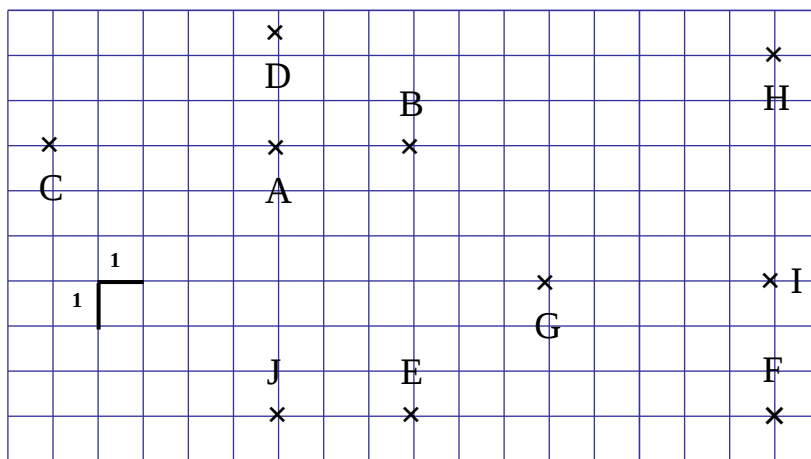
b. Déterminer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} \quad \overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{BG} \quad \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{HI}$$

$$\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{HI} \quad \overrightarrow{JE} \cdot \overrightarrow{FJ} \quad \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{JE}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IF} \quad \overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GH}$$

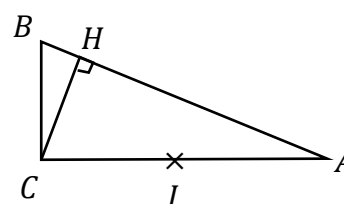


2) Le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

Le point  $I$  est le milieu de  $[AC]$ .  $(CH)$  est la hauteur issue de  $C$ .

On a  $AC = 156$ ,  $BA = 169$  et  $BH = 25$

- a. Déterminer :
- le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(CB)$
  - le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(CH)$
  - le projeté orthogonal de  $I$  sur  $(AC)$
  - le projeté orthogonal de  $I$  sur  $(BC)$
  - le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$



b. Calculer les longueurs  $BC$ ,  $CH$  et  $AH$

c. Calculer : •  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$  •  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AB}$  •  $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA}$  •  $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{AI}$  •  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB}$  •  $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CH}$  •  $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB}$  •  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$

## Exercice 10 : Paramètres

1) Dans chaque cas est-il possible de déterminer un réel  $k$  pour que les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient orthogonaux ?

a.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b.  $\vec{u} \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} k \\ -2 \end{pmatrix}$

c.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2k \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -k \\ 3 \end{pmatrix}$

2) Montrer que les vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$  sont orthogonaux, pour tous réels  $a$  et  $b$ .

## Exercice 11 : Propriétés des produits scalaires

1)  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs tels que  $\|\vec{u}\| = 3$  ;  $\|\vec{v}\| = 2$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$ . Calculer :

a.  $(\vec{u} + \vec{v})^2$

b.  $(\vec{u} - \vec{v})^2$

c.  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

2)  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs tels que  $\|\vec{u}\| = 1$  ;  $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$ . Calculer :

a.  $(3\vec{u} - 2\vec{v})^2$

b.  $(4\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v})$

3) Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs qui vérifient  $\vec{u}^2 = 2$  ;  $\vec{v}^2 = 5$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$

Montrer que les vecteurs  $(2\vec{u} + \vec{v})$  et  $(-\vec{u} + 2\vec{v})$  sont orthogonaux.