

Savoir Df. 3 : Calcul de dérivée – Somme et multiples

Exercice 7 : Dérivée des fonctions de référence - multiples

Dériver les fonctions suivantes :

$$f(x) = 5x^3$$

$$g(x) = 2e^x$$

$$h(x) = \frac{4}{x}$$

$$i(t) = -6t^7$$

$$j(x) = \frac{2}{3}$$

$$k(x) = -\frac{1}{2x}$$

$$l(x) = 6\sqrt{x}$$

$$m(t) = -3e^t$$

$$n(x) = -7x$$

$$p(x) = \frac{5}{2x}$$

$$q(y) = \frac{6y}{11}$$

$$r(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$s(x) = 12x^2$$

$$t(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$$

$$u(x) = 0,15x^4$$

$$v(x) = -1$$

$$w(a) = 7a^4$$

$$a(x) = -\frac{e^x}{e}$$

$$b(x) = \frac{-1}{3x}$$

$$c(x) = -\frac{2}{15}x^5$$

Exercice 8 : Dérivée de polynômes

1) Dériver les fonctions suivantes

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$$

$$g(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$$

$$h(t) = 7t^4 - t^2 + 3$$

$$i(x) = \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + x$$

$$j(x) = 0,1x^5 - 0,2x^3 + 0,01$$

$$k(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^2 - x$$

$$l(n) = \frac{n^2}{2} + 5n - \frac{1}{6}$$

Exercice 8 (suite)

2) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x - 7$

- Calculer $f'(x)$
- Déterminer le tableau de signe de f'
- En déduire le tableau de variation de f
- Compléter ce tableau en rajoutant les valeurs des extrema

3) On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2x^3}{3} - 6x^2 + 18x - 1$

- Dériver g
- Étudier le signe de g'
- En déduire le tableau de variation (complet) de g

4) On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3} - 5x^2 + 12x + 1$

- Calculer $f'(x)$
- Montrer que $f'(x) = 2(x - 3)(x^2 + x - 2)$
- Établir le tableau de signe de la dérivée f'
- En déduire le tableau de variation de la fonction f
- Montrer que, pour $x \in [-2 ; 3]$, on a $f(x) \leq \frac{43}{6}$

Vers la spé term : Avec des paramètres

On définit sur $\mathbb{R}$ et pour $m \in \mathbb{R}^*$, la fonction $f(x) = \frac{mx^3}{3} - mx^2 - (1-m)x + 3m$

1) Calculer $f'(x)$ en fonction de m

2) a. Pour quelles valeurs de m la fonction f sera-t-elle strictement décroissante ?

b. On suppose que $m = -1$.

À partir des questions (1) et (2a), en déduire le tableau de variation complet de f

Exercice 9 : Autres fonctions

1) Dériver les fonctions suivantes

$$f(x) = 3e^x - x + 2$$

$$g(x) = 4x - \frac{1}{x}$$

$$h(x) = 6\sqrt{x} - 5$$

$$i(x) = \frac{5}{x} + \frac{x}{4}$$

$$j(x) = 2x^2 - 5e^x + 4$$

$$k(t) = \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{4}{3t}$$

$$l(n) = \frac{\sqrt{n}}{3} - 4n$$

$$m(a) = 1 - e^a$$

2) On définit sur $\mathbb{R}^*$, la fonction f par $f(x) = x + 6 + \frac{4}{x}$

a. Calculer $f'(x)$. Montrer qu'on a, pour tout réel x non nul, $f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}$

b. Étudier le signe de $f'(x)$

c. En déduire le tableau de variation complet de f

Exercice 10 : Étude de fonction (3) – Sujet bac 1^e

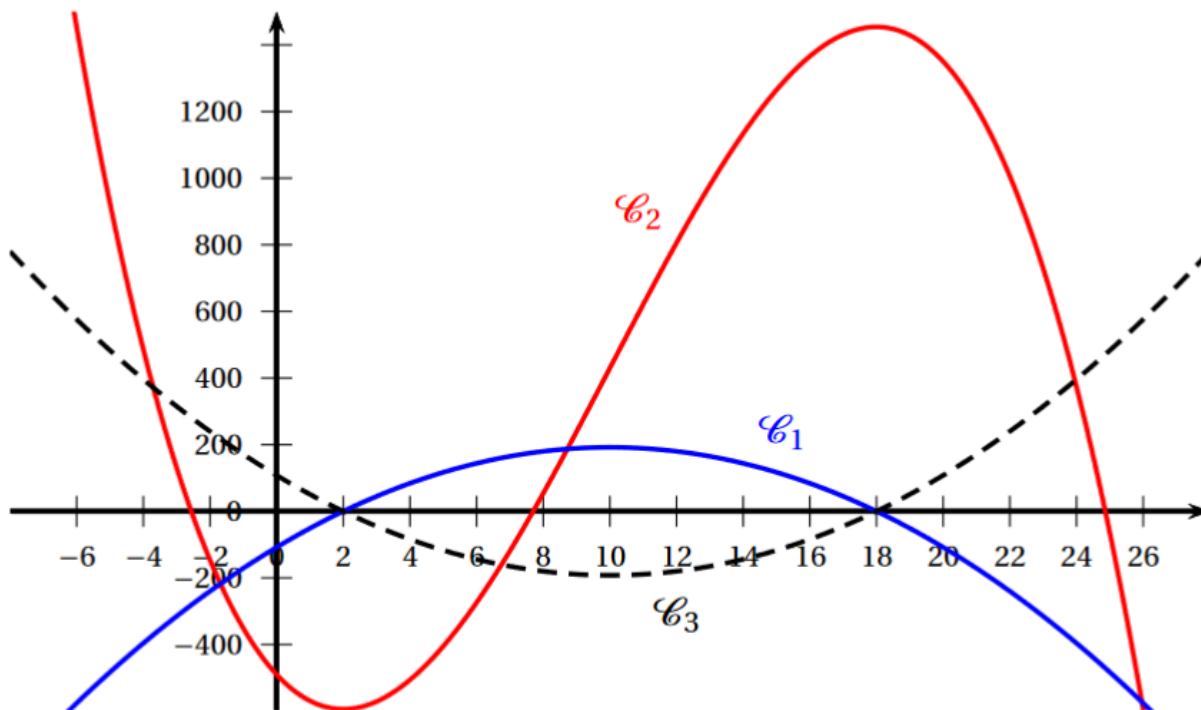
Soit h la fonction définie sur $[0 ; 26]$ par : $h(x) = -x^3 + 30x^2 - 108x - 490$.

1. Soit h' la fonction dérivée de h . Exprimer $h'(x)$ en fonction de x .

2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de h et $\mathcal{C}'$ celle de h' .

a. Identifier $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sur le graphique orthogonal ci-dessous parmi les trois courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ proposées.

b. Justifier le choix pour $\mathcal{C}'$.



3. Étudier le signe de $h'(x)$ puis dresser le tableau de variation de la fonction h sur $[0 ; 26]$.

Exercice 11 : Étude de fonction (4) – Sujet bac 1^{er}

Une entreprise produit du tissu.

Le coût total de production (en €) de l'entreprise est modélisé par la fonction :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750$$

où x est la longueur de tissu fabriqué exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 €.

On note $B(x)$ le résultat de l'entreprise, c'est-à-dire la différence entre la recette et le coût de production, pour la vente de x kilomètres de tissu.

1. Quel est le résultat de l'entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu ?
2. Montrer que : $B(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$.
3. Donner une expression de $B'(x)$, où B' est la fonction dérivée de la fonction B .
4. Dresser le tableau de signes de $B'(x)$ sur $[0 ; 10]$ puis le tableau de variations de la fonction B .
5. Combien de kilomètres de tissu l'entreprise doit-elle produire afin d'obtenir un résultat maximal ?

Exercice 12 : Étude de fonction (5) – Sujet bac 1^{er}

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 2]$ par : $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3$

Soit C sa représentation graphique dans le repère suivant.



1. On considère la droite d d'équation $y = 2x + 3$.

- a. Montrer que déterminer les abscisses des points d'intersection entre la droite d et la courbe C revient à résoudre l'équation $2x(x^2 + x - 2) = 0$ sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.
- b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre d et C .

2. On considère la droite d' d'équation $y = 2x + a$ où a est un nombre réel.

À l'aide du graphique, donner une valeur de a pour laquelle la droite d' et la courbe C ont un seul point d'intersection.

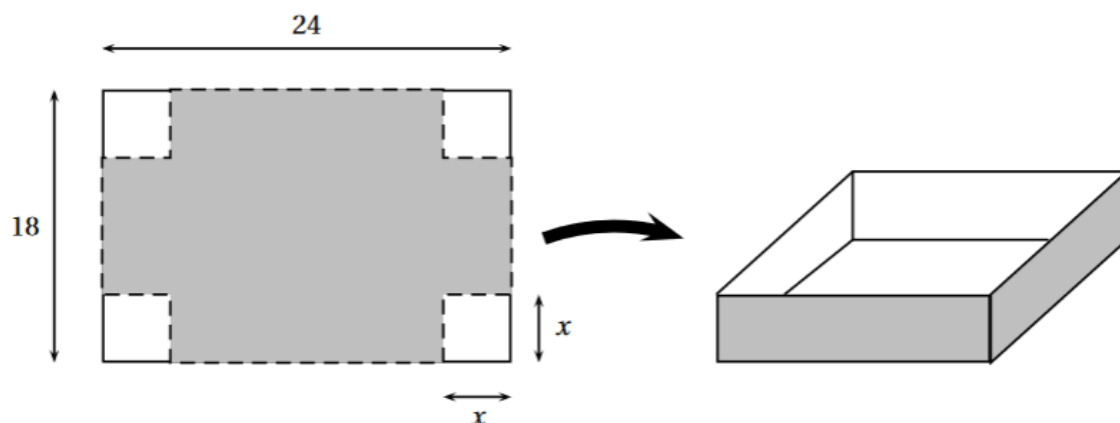
3. On note f' la fonction dérivée de f .

- a. Démontrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[-2 ; 2]$,

$$f'(x) = 6(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

- b. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[-2 ; 2]$.

Un industriel souhaite fabriquer une boîte sans couvercle à partir d'une plaque de métal de 18 cm de largeur et de 24 cm de longueur. Pour cela, il enlève des carrés dont la longueur du côté mesure x cm aux quatre coins de la pièce de métal et relève ensuite verticalement pour fermer les côtés.



Le volume de la boîte ainsi obtenue est une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 9]$ notée $V(x)$.

1. Justifier que pour tout réel x appartenant à $[0 ; 9]$: $V(x) = 4x^3 - 84x^2 + 432x$.
2. On note V' la fonction dérivée de V sur $[0 ; 9]$. Donner l'expression de $V'(x)$ en fonction de x .
3. Dresser alors le tableau de variations de V en détaillant la démarche.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x la contenance de la boîte est-elle maximale ?
5. L'industriel peut-il construire ainsi une boîte dont la contenance est supérieure ou égale à 650 cm^3 ? Justifier.

Exercice 14 : Étude de fonction (6) – Sujet bac 1^e

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ par : $g(x) = e^x - x + 1$.

1. On admet que g est dérivable sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ et on note g' sa fonction dérivée. Calculer $g'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.
3. Démontrer que g est strictement positive sur $[-5 ; 5]$, c'est-à-dire que : pour tout $x \in [-5 ; 5]$, $g(x) > 0$.

Soit f la fonction définie sur $[-5 ; 5]$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$

On appelle C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ et on note f' sa fonction dérivée.

4. On admet que pour tout réel x de $[-5 ; 5]$, $f'(x) = \frac{1}{e^x} \times g(x)$
En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.