

2. Exercices de bac – Dénombrement et combinatoire

Exercice 1 : VRAI-FAUX mélangés

1. Dans une classe de terminale, il y a 18 filles et 14 garçons.
On constitue une équipe de volley-ball en choisissant au hasard 3 filles et 3 garçons.
Affirmation 1 : Il y a 297 024 possibilités pour former une telle équipe.
2. Soient E et F les ensembles $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ et $F = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.
Affirmation 2 : Il y a davantage de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F .
3. Lorsqu'une personne achète son billet en ligne, un code de validation lui est envoyé par SMS afin qu'elle confirme son achat.
Ce code est généré de façon aléatoire et est constitué de 4 chiffres deux à deux distincts, le premier chiffre étant différent de 0.
Affirmation 3 : Le nombre de codes différents pouvant être générés est 5 040.
4. Dans une classe de 24 élèves, il y a 14 filles et 10 garçons.
Affirmation 4 : Il est possible de constituer 272 groupes différents de quatre élèves composés de deux filles et deux garçons.
5. Deux équipes de footballeurs de 22 et 25 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match.
Chaque joueur d'une équipe serre une seule fois la main de chaque joueur de l'autre équipe.
Affirmation 5 : 47 poignées de mains ont été échangées.
6. Une course oppose 18 concurrents. On récompense indistinctement les trois premiers en offrant le même prix à chacun.
Affirmation 6 : Il y a 4 896 possibilités de distribuer ces prix.
7. Une association organise une compétition de course de haies qui permettra d'établir un podium (le podium est constitué des trois meilleurs sportifs classés dans leur ordre d'arrivée). Sept sportifs participent au tournoi. Jacques est l'un d'entre eux.
Affirmation 7 : Il y a 90 podiums différents dont Jacques fait partie.
8. Une anagramme d'un mot est le résultat d'une permutation des lettres de ce mot.
Exemple : le mot BAC possède 6 anagrammes : BAC, BCA, ABC, ACB, CAB, CBA.
Affirmation 8 : Le mot EULER possède 120 anagrammes.
9. Un cube $ABCDEFGH$ possède 8 sommets. On s'intéresse au nombre N de segments que l'on peut construire en reliant 2 sommets distincts quelconques du cube.
Affirmation 9 : $N = \frac{8^2}{2}$.

Exercice 2 : Sujet 1 – Centres étrangers - juin 2024

Un sac opaque contient huit jetons numérotés de 1 à 8, indiscernables au toucher.

A trois reprises, un joueur pioche un jeton dans ce sac, note son numéro, puis le remet dans le sac.

Dans ce contexte, on appelle « tirage » la liste ordonnée des trois numéros obtenus.

Par exemple, si le joueur pioche le jeton numéro 4, puis le jeton numéro 5, puis le jeton numéro 1, alors le tirage correspondant est (4; 5; 1).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2.
 - a. Déterminer le nombre de tirages sans répétition de numéro.
 - b. En déduire le nombre de tirages contenant au moins une répétition de numéro.

On note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton pioché, X_2 celle égale au numéro du deuxième jeton pioché et X_3 celle égale au numéro du troisième jeton pioché.

Puisqu'il s'agit d'un tirage avec remise, les variables aléatoires X_1 , X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité.

2. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1
3. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X_1

On note $S = X_1 + X_2 + X_3$ la variable aléatoire égale à la somme des numéros des trois jetons piochés.

4. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire S .
5. Déterminer $P(S = 24)$.
6. Si un joueur obtient une somme supérieure ou égale à 22, alors il gagne un lot.
 - a. Justifier qu'il existe exactement 10 tirages permettant de gagner un lot.
 - b. En déduire la probabilité de gagner un lot.

Exercice 3 : Sujet 2 – Centres étrangers – juin 2025

Le codage « base64 », utilisé en informatique, permet de représenter et de transmettre des messages et d'autres données telles que des images, en utilisant 64 caractères : les 26 lettres majuscules, les 26 lettres minuscules, les chiffres de 0 à 9 et deux autres caractères spéciaux.

Dans cette partie, on s'intéresse aux séquences de 4 caractères en base64. Par exemple, « gP3g » est une telle séquence. Dans une séquence, l'ordre est à prendre en compte : les séquences « m5C2 » et « 5C2m » ne sont pas identiques.

1. Déterminer le nombre de séquences possibles.
2. Déterminer le nombre de séquences si l'on impose que les 4 caractères sont différents deux à deux.
3.
 - a. Déterminer le nombre de séquences ne comportant pas de lettre A majuscule.
 - b. En déduire le nombre de séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
 - c. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement une fois la lettre A majuscule.
 - d. Déterminer le nombre de séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Exercice 4 : Sujet 3 – Amérique du Sud – novembre 2025

On considère l'ensemble des nombres entiers relatifs **non nuls** compris entre -30 et 30 ; cet ensemble peut s'écrire ainsi : $\{-30 ; -29 ; -28 ; \dots -1 ; 1 ; \dots ; 28 ; 29 ; 30\}$. Il comporte 60 éléments.

On choisit dans cet ensemble successivement et sans remise un entier relatif a puis un entier relatif c .

1. Combien de couples $(a; c)$ différents peut-on ainsi obtenir ?

On considère l'évènement M : « l'équation $ax^2 + 2x + c = 0$ possède deux solutions réelles distinctes », où a et c sont les entiers relatifs précédemment choisis.

2. Montrer que l'évènement M a lieu si et seulement si $ac < 1$.
3. Expliquer pourquoi l'évènement contraire M comporte 1 740 issues.
4. Quelle est la probabilité de l'évènement M ? On arrondira le résultat à 10^{-2} .

1. Applications – CORRECTIONS

Exercice 1 : CORRECTION

- Il y a 11 possibilités pour le 1^{er} capitaine et pour chacune de celles-ci à nouveau 11 possibilités pour le 2^e capitaine, donc il y a au total $11^2 = 121$ binômes possibles.
- Il y a 10 possibilités (0 à 9) pour chaque chiffre, donc $10^4 = 10\,000$ codes PIN possibles.
 - Pour un code PIN commençant par 3, il y a 10 possibilités pour chacun des 3 chiffres restants, donc 1000 codes PIN commençant par 3.
- Il y a 7 possibilités pour le 1^{er} client, puis 6 pour le 2^e, etc., et plus qu'une possibilité pour le dernier à s'asseoir. Il y a donc $7! = 5040$ possibilités.
 - Il y a alors 7 possibilités pour Adia, puis 2 possibilités pour Bertrand, puis 5 puis 4 etc. pour les autres. Cela fait donc $7 \times 2 \times 5! = 7! \div 3 = 1680$ possibilités.
- Pour chacun des déplacements, il y a 4 possibilités. Il y a donc $6^4 = 1296$ chemins possibles.

Exercice 2 : CORRECTION

- Pour chaque boulangerie, il y a 7 choix possibles. Il y a donc $7^4 = 2401$ façons d'attribuer un jour de fermeture hebdomadaire à chaque boulangerie.
- La première boulangerie peut fermer n'importe quel jour de la semaine, ce qui lui laisse 7 choix. La seconde boulangerie peut fermer n'importe quel autre jour : 6 choix. La troisième ne peut pas fermer l'un des jours déjà choisi, ce qui lui laisse 5 choix, et pour la dernière, il ne reste que 4 choix. Le nombre de possibilités est donc $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$.
- On va raisonner par différence, et compter plutôt le nombre de possibilités pour que toutes les boulangeries ferment le même jour : il y a 7 choix (on choisit juste le jour de fermeture commun). Le nombre de possibilités pour qu'il y ait au moins une boulangerie ouverte chaque jour est donc $7^4 - 7 = 2394$.

Exercice 3 : CORRECTION

- On effectue 8 tirages parmi 52, sans remise, sans conserver l'ordre du tirage.
Le nombre de mains est donc donné par : $\binom{52}{8} = 752\,538\,150$ (plus de 752 milliards).
- Il s'agit de 4 tirages parmi 9, sans remise et sans prise en compte de l'ordre des tirages.
Zoé peut donc réaliser $\binom{9}{4} = 126$ choix.
 - Elle choisit d'abord l'album qu'elle voulait, puis elle n'a plus qu'à choisir 3 albums parmi les 8 restants.
Elle peut donc réaliser $\binom{8}{3} = 56$ choix.

Exercice 4 : CORRECTION

1.
 - a. Parmi les 10 droites, il faut en choisir 3 pour obtenir un triangle.
Le nombre de choix de 3 droites parmi 10, sans remise et sans prise en compte de l'ordre de tirage est donc $\binom{10}{3} = 120$. Avec 10 droites en position générale, on obtient donc 120 triangles.
 - b. Avec le même raisonnement, on a donc :
$$T_n = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$
2.
 - a. Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18. Le nombre de podiums possibles est donc égal à $20 \times 19 \times 18 = 6840$.
 - a. Le premier concurrent est Emile. Pour les autres places, il y a 19 puis 18 choix possibles ; Le nombre de podiums ainsi constitués est de $19 \times 18 = 342$.
 - b. Il y a trois choix possibles pour la place d'Emile. Une fois ce choix fixé, il y a 19 choix possibles pour la première des deux autres places, puis 18 choix possibles pour la seconde des deux autres places. Le nombre de podiums vérifiant ces conditions est donc de $3 \times 19 \times 18 = 1026$.
On peut aussi compter le nombre total de podiums (qui vaut 6840) et lui soustraire le nombre de podiums sans Émile (qui vaut $19 \times 18 \times 17 = 5814$). Le nombre de podiums avec Émile est alors $6840 - 5814 = 1026$. On retrouve (heureusement !) le même résultat.
 - c. L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi 20, c'est-à-dire $\binom{20}{3} = 1140$.

2. Exercices de bac – CORRECTIONS

Exercice 5 : VRAI FAUX - CORRECTION

1. On choisit d'abord les 3 filles sans remise parmi les 18 puis les 3 garçons parmi les 14.
Le nombre d'équipes possibles est alors : $\binom{18}{3} \times \binom{14}{3} = 297\,024$.
L'affirmation 1 est VRAIE.
2. Le nombre de triplets d'éléments distincts de E est $7 \times 6 \times 5 = 210$.
Le nombre de combinaisons à 4 éléments est $\binom{10}{4} = 210$.
L'affirmation 2 est FAUSSE.
3. Il y a 9 choix pour le 1^{er} chiffre, puis 9 à nouveau pour le 2^e puis 8 puis 7.
Cela donne $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$ codes possibles.
L'affirmation 3 est FAUSSE.
4. On choisit 2 filles parmi 14 puis 2 garçons parmi 10.
Cela donne $\binom{14}{2} \times \binom{10}{2} = 7 \times 13 \times 5 \times 9 = 4\,095$ possibilités.
L'affirmation 4 est FAUSSE.
5. On compte les couples de joueurs, avec le 1^{er} choisi parmi 22 et le 2^e choisi parmi 25.
Cela fait $22 \times 25 = 550$ poignées de main.
L'affirmation 5 est FAUSSE.
6. On choisit 3 concurrents parmi 18 : $\binom{18}{3} = 816$ podiums possibles.
L'affirmation 6 est FAUSSE.
7. Jacques a 3 possibilités (1^{re}, 2^e ou 3^e position), puis il y a $6 \times 5 = 30$ possibilités pour les autres positions sur le podium. Cela fait donc $3 \times 30 = 90$ podiums différents.
L'affirmation 7 est VRAIE.
8. Il y a 2 places parmi 5 pour placer les E puis il reste 3 places, puis 2 places, puis 1 place pour les trois autres lettres. Cela fait donc $\binom{5}{2} \times 3 \times 2 \times 1 = 10 \times 6 = 60$ anagrammes
L'affirmation 8 est FAUSSE.
9. Un cube $ABCDEFGH$ possède 8 sommets. On s'intéresse au nombre N de segments que l'on peut construire en reliant 2 sommets distincts quelconques du cube.
On choisit 2 sommets parmi 8 pour obtenir un segment, cela fait $\binom{8}{2} = 4 \times 7 = 28$ segments possibles, alors que $\frac{8^2}{2} = 32$.
L'affirmation 9 est FAUSSE.

Exercice 6 : Sujet 1 – CORRECTION

1. Il y a au total $8^3 = 512$ tirages possibles.
2.
 - a. Il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ tirages sans répétition de numéro.
 - b. Il y a au total 512 tirages possibles avec répétition éventuelle de numéro (certains sans, certains avec au moins une).
Il y a donc $512 - 336 = 176$ tirages contenant au moins une répétition de numéro.
3. La loi de probabilité de X_1 est donnée par : $\forall k \in \{1; \dots; 8\} : p(X_1 = k) = \frac{1}{8}$.
3. $E(X_1) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \dots + \frac{8}{8} = \frac{1}{8}(1 + 2 + \dots + 8) = \frac{1}{8} \times 8 \times \frac{1+8}{2} = 4,5$.
4. X_2 et X_3 ont la même loi de probabilité que X_1 donc
 $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times 4,5 = 13,5$.
5. Il n'y a qu'une façon d'obtenir $S = 24$: c'est en obtenant 8 à chaque tirage.
On a alors : $P(S = 24) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{512}$.
6.
 - a. Un seul tirage permet d'obtenir 24.
Pour obtenir 23, il faut deux 8 et un 7, ce qui donne 3 tirages possibles.
Pour obtenir 22, il faut un 8 et deux 7 (3 tirages) ou deux 8 et un six (3 tirages).
Cela fait donc bien 10 tirages possibles pour obtenir un lot.
 - b. La probabilité de gagner un lot est donc $\frac{10}{512} = \frac{5}{256}$.

Exercice 7 : Sujet 2 – CORRECTION

1. Il y a $64^4 = 16\,777\,216$ séquences possibles.
2. Il y a alors $64 \times 63 \times 62 \times 61 = 15\,249\,024$ séquences possibles
3.
 - a. Sans lettre A majuscule, cela fait alors $63^4 = 15\,752\,961$ séquences.
 - b. Il y a donc $16\,777\,216 - 15\,249\,024 = 1\,024\,255$ séquences comportant au moins une lettre A majuscule.
 - c. Il y a $1 \times 63^3 = 250\,047$ séquences comportant un A en 1^{re} position.
De même, il y en a la même quantité avec un A en 2^e position, en 3^e position puis en 4^e position.
Il y a donc en tout $4 \times 250\,047 = 1\,000\,188$ séquences comportant un seul A.
Autre méthode : On choisit d'abord la position du A parmi les 4 possibles : il y a $\binom{4}{1} = 4$ possibilités.
Puis on choisit les 3 autres lettres (à chaque fois 63 possibilités), d'où le calcul 4×63^3 .
 - d. On choisit les positions des deux lettres A parmi les 4 possibles : il y a $\binom{4}{2} = 6$ possibilités, puis les 2 autres lettres. Cela donne en tout $6 \times 63^2 = 23\,814$ séquences comportant exactement deux fois la lettre A majuscule.

Exercice 8 : Sujet 3 – CORRECTION

1. Il y a 60 possibilités pour a puis 59 pour c , cela donne $60 \times 59 = 3\,540$ couples $(a; c)$ différents.
2. L'évènement M a lieu $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow 4 - 4ac > 0 \Leftrightarrow 4qc < 4 \Leftrightarrow ac < 1$ CQFD.
3. On ne peut jamais avoir $ac = 1$ ou $ac = 0$. Pour avoir $ac < 1$, il faut en fait avoir $ac < 0$.
Pour obtenir un produit négatif, il faut que a et c soient de signes différents.
Donc on a alors 60 possibilités de choix pour a et alors seulement 30 possibilités pour c du signe opposé à a . Cela donne $60 \times 30 = 1800$ possibilités.
L'évènement contraire M comporte donc $3540 - 1800 = 1740$ issues.
4. On a donc $p(M) = \frac{1800}{3540} \simeq 0,51$. Il y a environ 51% de chances que l'équation $ax^2 + 2x + c = 0$ possède deux solutions réelles distinctes.