

Corrigé Exercice 10

1. M_n sera entre 9 et 11 lorsque $|M_n - 10| < 1$.

Pour avoir $P(|M_n - 10| < 1) > 0,9$, il faut avoir $P(|M_n - 10| > 1) < 1 - 0,9 = 0,1$.

Or d'après l'inégalité de concentration :

$$P(|M_n - 10| > 1) \leq \frac{3}{n \times 1^2} \Rightarrow P(|M_n - 10| > 1) \leq \frac{3}{n}$$

Il faut donc résoudre : $\frac{3}{n} \leq 0,1 \Rightarrow n \geq \frac{3}{0,1} \Rightarrow n \geq 30$.

C'est donc à partir de $n = 30$ que l'on pourra être sûr à 90% que M_n se trouve entre 9 et 11.

2. K_n sera entre 0,30 et 0,70 lorsque $|K_n - 0,5| < 0,2$.

Pour avoir $P(|K_n - 0,5| < 0,2) > 0,95$, il faut avoir $P(|K_n - 0,5| > 0,2) < 1 - 0,95 = 0,05$.

Or d'après l'inégalité de concentration :

$$P(|K_n - 10| > 0,2) \leq \frac{0,4^2}{n \times 0,2^2} \Rightarrow P(|K_n - 10| > 0,2) \leq \frac{4}{n}$$

Il faut donc résoudre : $\frac{4}{n} \leq 0,05 \Rightarrow n \geq \frac{4}{0,05} \Rightarrow n \geq 80$.

Il faut jouer à 80 parties au minimum pour être sûr à 95% de gagner en moyenne entre 0,30 et 0,70 € par partie.

Corrigé Exercice 11

1. M_{20} représente l'âge moyen des enfants lors de l'apparition de leurs premiers symptômes allergiques.

$$2. E(M_{20}) = E\left(\frac{A_1 + A_2 + \dots + A_{20}}{20}\right) = \frac{1}{20} E(A_1 + A_2 + \dots + A_{20}) = \frac{1}{20} (E(A_1) + \dots + E(A_{20})) = \frac{1}{20} \times 20 \times 4 \\ \Rightarrow E(M_{20}) = 4.$$

Etant donné que les variables aléatoires sont indépendantes, on a aussi :

$$V(M_{20}) = \frac{1}{20^2} V(A_1 + A_2 + \dots + A_{20}) = \frac{1}{20^2} \times 20 \times 2,25 = \frac{2,25}{20} = 0,1125.$$

3. D'après l'inégalité de concentration, on a : $P(|M_{20} - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{20\delta^2}$ avec $\mu = 4$ et $V = 2,25$.

Or $2 < M_{20} < 6 \Leftrightarrow 4 - 2 < M_{20} < 4 + 2$ correspond à un écart maximum de 2 entre M_{20} et μ , c'est-à-dire $|M_{20} - \mu| < 2$.

On utilise donc $\delta = 2$:

$$P(|M_{20} - \mu| \geq 2) \leq \frac{2,25}{20 \times 4} \Rightarrow P(|M_{20} - \mu| < 2) > 1 - 0,028125$$

$$\Rightarrow P(|M_{20} - \mu| < 2) > 0,971875 \text{ et par élargissement } P(2 < M_{20} < 6) > 0,97 \quad \text{CQFD}$$

Il y a donc plus de 97% de chances que l'âge moyen au moment des 1^{ers} symptômes des enfants de l'échantillon soit entre 2 et 6 ans.

Corrigé Exercice 12

1. $E(S_n) = np = 0,95n$ et $V(S_n) = np(1-p) = n \times 0,95 \times 0,05 = 0,0475n$.

2. a. $P(S_{150} = 145) = \binom{150}{145} \times 0,95^{145} \times 0,05^5 \approx 0,109$.

Il y a environ 10,9% de chances qu'il y ait exactement 145 jouets ayant réussi le test de fabrication dans un lot de 150 jouets.

b. 94% de 150 représente 141 jouets.

On calcule donc : $P(X \geq 141) = 1 - P(X \leq 140) \approx 0,781$.

3. a. $E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n}0,95n = 0,95$
et $V(F_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2}0,0475n = \frac{0,0475}{n}$ CQFD.

b. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P(|F_n - E(F_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(F_n)}{\delta^2}$$

avec $E(F_n) = 0,95$ et $V(F_n) = \frac{0,0475}{n}$.

Or pour que F_n soit entre 0,93 et 0,97, il faut que $|F_n - 0,95| < 0,02$.

On choisit donc $\delta = 0,02$:

$$\begin{aligned} P(|F_n - 0,95| \geq 0,02) &\leq \frac{\frac{0,0475}{n}}{0,02^2} \Rightarrow P(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \leq \frac{0,0475}{0,02^2 n} \\ &\Rightarrow P(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \leq \frac{118,75}{n} \end{aligned}$$

Or pour que $P(|F_n - 0,95| < 0,02) > 0,96$, il faut que $P(|F_n - 0,95| \geq 0,02) \leq 0,04$.

On résout donc : $\frac{118,75}{n} \leq 0,04 \Rightarrow n \geq \frac{118,75}{0,04}$ comme $\frac{118,75}{0,04} = 2968,75$ on a $n \geq 2\,969$

Il faut donc prélever un lot d'au moins 2969 jouets pour être sûr à 96% qu'il y ait entre 93% et 97% de jouets ayant réussi le test de fabrication.