

Savoir Ve. 6 : Représentation paramétrique d'un plan

Entraînement 1

1. On considère les points $R(-1; -2; 0)$, $F(2; 1, -1)$ et $T(3; -1; -2)$.
Déterminer une représentation paramétrique du plan (RTF) .

2. On considère un plan $\mathcal{P}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 3 + t - t' \\ y = -3 + 2t' \\ z = -2t + t' \end{cases} \quad t, t' \in \mathbb{R}$$

a. Donner les coordonnées de deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

b. Donner les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$.

c. Le point $S(-2; -3; 8)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

d. Soit (d) la droite passant par le point $H(2; -1; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{a} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Montrer que (d) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Entraînement 2

1. On considère les points $R(1; 1; -1)$, $F(1; -2, -2)$ et $T(-1; 3; 4)$.
Déterminer une représentation paramétrique du plan (RTF) .

2. On considère un plan $\mathcal{P}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 3t + t' \\ y = 1 - 3t - 2t' \\ z = -2 - t \end{cases} \quad t, t' \in \mathbb{R}$$

a. Donner les coordonnées de deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

b. Donner les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$.

c. Le point $S(1; 2; 5)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

d. Soit (d) la droite passant par le point $H(-4; 6; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{a} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que (d) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Entraînement n°3

1. On considère les points $K(1; 1; 1)$, $L(-1; 2, 3)$ et $M(4; -1; 2)$.
Déterminer une représentation paramétrique du plan (KLM) .

2. On considère un plan $\mathcal{P}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 1 - t + 3t' \\ y = -2 + t \\ z = 4t - t' \end{cases} \quad t, t' \in \mathbb{R}$$

a. Donner les coordonnées de deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

b. Donner les coordonnées de deux vecteurs directeurs du plan $\mathcal{P}$.

c. Le point $S(-3; -3; 5)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

Corrections Savoir Ve. 6

Corrigé Entraînement n°1

1. Les vecteurs $\overrightarrow{RF} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ forment une base du plan (RTF) et ce plan contient le point R donc il

a pour représentation paramétrique :

$$(RTF) : \begin{cases} x = -1 + 3t + 4t' \\ y = -2 + 3t + t' \\ z = -t - 2t' \end{cases} \quad t, t' \in \mathbb{R}$$

2. a. Par exemple avec $t = t' = 0$, on obtient le point $A(3; -3; 0)$.

Et avec $t = t' = 1$, on obtient le point $B(3; -1; -1)$.

- b. On donne par exemple : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- c. On résout le système :

$$\begin{cases} 3 + t - t' = -2 \\ -3 + 2t' = -3 \\ -2t + t' = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ t = -5 \\ t = -4 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc $S \notin \mathcal{P}$.

- d. • On montre d'abord que le point H est dans le plan $\mathcal{P}$. Pour cela on résout :

$$\begin{cases} 3 + t - t' = 2 \\ -3 + 2t' = -1 \\ -2t + t' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Le système a une solution donc $H \in \mathcal{P}$.

- On montre ensuite que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont coplanaires. Pour cela on résout :

$$\vec{a} = t\vec{u} + t'\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} t - t' = 3 \\ 2t' = -4 \\ -2t + t' = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = -2 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Le système a une solution donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sont coplanaires.

- On conclut : ainsi, la droite (d) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Corrigé Entraînement n°2

1. Les vecteurs $\overrightarrow{RF} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RT} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ forment une base du plan (RTF) et ce plan contient le point R donc il a pour représentation paramétrique :

$$(RTF) : \begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = 1 - 3t + 2t' \\ z = -1 - t + 5t' \end{cases} \quad t, t' \in \mathbb{R}$$

2. a. Par exemple avec $t = t' = 0$, on obtient le point $A(0; 1; -2)$.
Et avec $t = t' = 1$, on obtient le point $B(4; -4; -3)$.

b. On donne par exemple : $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- c. On résout le système :

$$\begin{cases} 3t + t' = 1 \\ 1 - 3t - 2t' = 2 \\ -2 - t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -7 \\ t' = 22 \\ t' = 10 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution donc $S \notin \mathcal{P}$.

- d. • On montre d'abord que le point H est dans le plan $\mathcal{P}$. Pour cela on résout :

$$\begin{cases} 3t + t' = -4 \\ 1 - 3t - 2t' = 6 \\ -2 - t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

Le système a une solution donc $H \in \mathcal{P}$.

- On montre ensuite que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{d}$ sont coplanaires.

Pour cela on peut remarquer à vue d'œil que : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{d}$ (ou sinon on résout le système...)

Donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{d}$ sont coplanaires.

- Ainsi, la droite (d) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

Corrigé Entraînement n°3

1. On a : $\overrightarrow{KL} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KM} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(KLM) a donc pour représentation paramétrique : $(KLM) : \begin{cases} x = 1 - 2t + 3t' \\ y = 1 + t - 2t' \\ z = 1 + 2t + t' \end{cases} \quad t, t' \in \mathbb{R}$

2. a. Par exemple : $A(1; -2; 0)$ et $B(2; -1; 3)$ (pour $t = t' = 1$). b. Par exemple : $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c. On résout le système : $\begin{cases} -3 = 1 - t + 3t' \\ -3 = -2 + t \\ 5 = 4t - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ 2 + 3t' = -3 \\ -4 - t' = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -\frac{5}{3} \\ t' = -9 \end{cases}$

Le système n'a pas de solution donc $S \notin \mathcal{P}$.