

Savoir A. 3 : Congruences et équations

Exercice 13 : Des équations modulo n

1) Donner la forme générale des solutions des équations suivantes :

a. $x \equiv 4 [11]$

b. $y \equiv 9 [5]$

c. $a \equiv -11 [3]$

2) Déterminer les solutions particulières des équations correspondant aux conditions imposées

a. $\begin{cases} x \equiv -3 [7] \\ 0 < x < 20 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y \equiv 4 [9] \\ 10 \leq y \leq 40 \end{cases}$

c. $\begin{cases} a \equiv 22 [4] \\ -12 \leq a \leq 5 \end{cases}$

3) Sans chercher à les résoudre, « simplifier » les équations suivantes au modulo demandé

a. $37x - 29 \equiv 15 [8]$

b. $12 - 45y \equiv 9 [2]$

c. $-16m + 20 \equiv 14p + 2 [7]$

Exercice 14 : Résolution « directe »

1) Donner la forme générale des solutions des équations : a. $2 + x \equiv 4 [6]$

b. $5 \equiv y - 13 [3]$

2) Déterminer les solutions des systèmes : a. $\begin{cases} n - 47 \equiv 29 [5] \\ -5 \leq n \leq 15 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 3 \equiv -1 [9] \\ 100 < x < 120 \end{cases}$

Exercice 15 : Résolution avec un tableau de restes

1) En utilisant un tableau de restes, donner la forme générale des solutions des équations :

a. $2x \equiv 4 [6]$

b. $3n \equiv 7 [11]$

c. $x^3 \equiv 4^3 [7]$

d. $6x + 25 \equiv 56 [4]$

2) Quels sont les entiers x tels que $(x + 3)^2$ soit un multiple de 4 ? Justifier avec un tableau de restes.

3) a. Compléter le tableau des restes dans la congruence modulo 5 ci-contre :

$x \equiv \dots [5]$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \dots [5]$					

b. Déduisez-en que l'équation $x^2 - 5y^2 = 3$, avec x et y entiers naturels, n'a pas de solution

Exercice 16 : Résolution avec un inverse

1) On a l'équation $7x \equiv 5 [9]$.

a. Trouver le plus petit entier k tel que $7k \equiv 1 [9]$

b. Multiplier l'équation par k et résoudre

2) À l'aide cette méthode, résoudre les équations suivantes (sans passer par un tableau de restes)

a. $3x \equiv 2 [11]$

b. $7x - 12 \equiv 1 [15]$

c. $5n + 9 \equiv -3 [7]$

Exercice 17 : Deux inconnues

- 1)** On sait que $2a - 7 \equiv 5b \pmod{6}$.
- a.** Trouver un nombre k tel que $5k \equiv 1 \pmod{6}$
 - b.** En déduire que $b \equiv 4a + 1 \pmod{6}$
- 2)**
- a.** On sait que $4x - 13 \equiv y + 1 \pmod{5}$. Exprimer y en fonction de x . Montrer que $x \equiv 4y + 1 \pmod{5}$
 - b.** On a $74x - 39y \equiv 27 \pmod{5}$. En déduire y en fonction de x
 - c.** On a $3m + 25 \equiv 5p - 15 \pmod{26}$. Exprimer m en fonction de p puis p en fonction de m
 - d.** Montrer qu'on a l'équivalence : $2x + 3 \equiv y - 1 \pmod{7} \Leftrightarrow x \equiv 4y + 5 \pmod{7}$

Exercice 18 : Systèmes de congruences

Résoudre les systèmes :

$$(S_1): \begin{cases} 5x - y \equiv 6 \pmod{3} \\ 2x + 7y \equiv 13 \pmod{3} \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} 2a \equiv 10 + 3b \pmod{7} \\ b \equiv 12 + 6a \pmod{7} \end{cases} \text{ sachant que : } \begin{cases} 0 \leq a < 7 \\ 20 \leq b < 27 \end{cases}$$