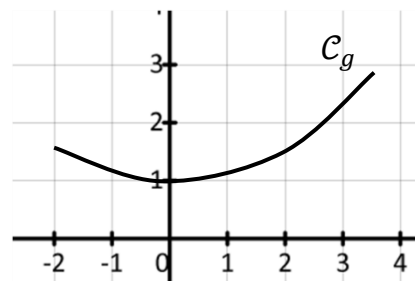


Savoir Fi. 7 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Exercice 22 : Lien entre le signe de f et la variation de F

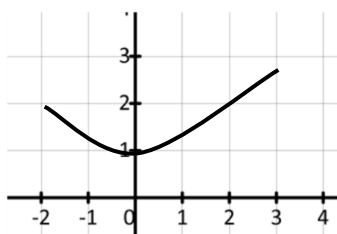
- 1) Soit Φ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $\Phi(a) = \int_0^a (\ln t + 1) dt$
- Déterminer $\Phi(0)$ et l'expression de $\Phi'(a)$.
 - Déterminer le signe de Φ' et en déduire le sens de variation de Φ .



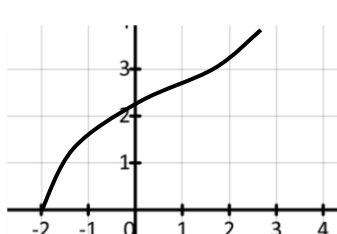
- 2) La fonction g est une fonction continue et positive sur $[-2; +\infty[$ représentée par la courbe C_g ci-contre.

G est la fonction définie sur $[-2; +\infty[$ par : $G(x) = \int_{-2}^x g(t) dt$

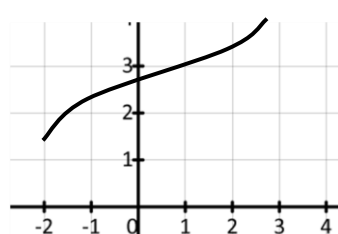
Laquelle des courbes ci-dessous peut représenter la fonction G ? Justifier.



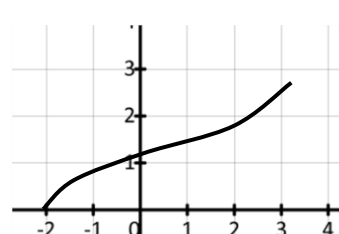
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Courbe 4

Exercice 23 : Étude d'une primitive

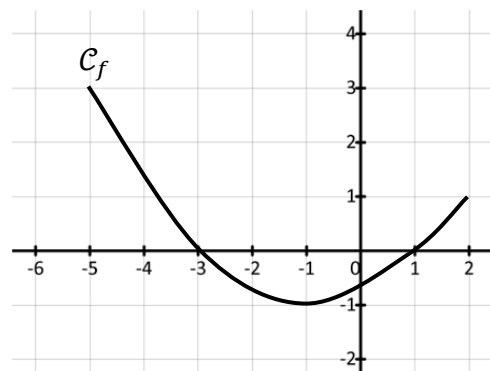
- 1) On considère la fonction G défini sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$
 Pour chacune des proposition suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et justifier.

- $G(0) = 1$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = e^{-x^2}$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x)$ est positif
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x)$ est croissante

- 2) La fonction f continue sur $[-5; 2]$ est représentée ci-contre.

Pour tout $x \in [-5; 2]$, on définit $F(x)$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

- Donner le signe de $F(x)$ pour $-3 \leq x \leq 0$
- Même question pour $0 \leq x \leq 1$
- Déterminer les variations de F



- 3) On donne les fonctions H et I définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_1^x e^{-2t} dt \text{ et } I(x) = \int_x^0 \frac{2}{1-t} dt$$

- Déterminer une expression de $H(x)$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$.
- Déterminer une expression de $I(x)$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} I(x)$.

Exercice 24 : Extrait bac

On pose $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2-x} dx$

1) a. Étudier le signe et le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^{-x}}{2-x}$ sur $[0; 1]$

b. Montrer que, pour tout $x \in [0; 1]$, $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

2) Soit $J = \int_0^1 (x+2)e^{-x} dx$ et $K = \int_0^1 x^2 f(x) dx$

a. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $G(x) = (ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction $g(x) = (x+2)e^{-x}$ sur $[0; 1]$. En déduire J .

b. De la question 1.b, déduire que $\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$

c. Démontrer que $J + K = 4I$

d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I , puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près