

Savoir Ve. 5 : Coplanarité

Entraînement 1

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-2; 0; 1)$, $B(4; -2; 1)$, $C(-4; -6; 3)$ et $D(2; 2; 0)$.
 - a. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$ ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
 - b. Que peut-on en déduire à propos des points A , B , C et D ?
2. On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?
 - b. Existe-t-il deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$?
 - b. Qu'en déduit-on à propos des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

Entraînement 2

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(1; -1; 2)$, $B(7; -5; 2)$, $C(-1; 2; 1)$ et $D(8; -4; 1)$.
 - a. Calculer les coordonnées du vecteur $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.
 - b. Que peut-on en déduire à propos des points A , B , C et D ?
2. On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 - a. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
 - b. Existe-t-il deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$?
 - b. Qu'en déduit-on à propos des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

Entraînement 3

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(1; 2; -1)$, $B(3; 3; -1)$, $C(1; 5; -3)$ et $D(2; 7; -4)$.
 - a. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$ ainsi que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.
 - b. Que peut-on en déduire à propos des points A , B , C et D ?
2. On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
 - a. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?
 - b. Existe-t-il deux réels m et n tels que $\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$?
 - b. Qu'en déduit-on à propos des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

Entraînement n°4

On se place dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $C(3; -1; 4)$, $D(5; 0; 4)$, $E(2; -1; 5)$ et $F(6; 1; 5)$.

- Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$. Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils colinéaires ?
- Existe-t-il deux réels a et b tels que $\overrightarrow{CF} = a\overrightarrow{CE} + b\overrightarrow{CD}$?
- Que peut-on en déduire à propos des points C , D , E et F ?

2. On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer qu'on a : $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w} = \vec{0}$
- Qu'en déduit-on à propos des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$?

Corrigé Entraînement n°1

1. a. On a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- b. On a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, donc les points A , B , C et D sont aussi coplanaires.
2. a. On a $\frac{x_{\vec{w}}}{x_{\vec{u}}} \neq \frac{y_{\vec{w}}}{y_{\vec{u}}}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.
- b. On résout : $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\beta = 3 \\ \beta = -1 \\ 3\alpha + \beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -5 \\ \beta = -1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$
Il est donc impossible de trouver deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.
- b. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant non nuls, c'est donc que les trois vecteurs ne sont pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

Corrigé Entraînement n°2

1. a. $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- b. On a : $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, donc les points A , B , C et D sont aussi coplanaires.
2. a. On a $\frac{x_{\vec{v}}}{x_{\vec{u}}} \neq \frac{y_{\vec{v}}}{y_{\vec{u}}}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
- b. On résout :
$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ -\alpha + 3\beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ 5\beta = 1 \\ -3\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{5} \\ \beta = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Il est donc impossible de trouver deux réels α et β tels que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.
- b. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant non nuls, c'est donc que les trois vecteurs ne sont pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

Corrigé Entraînement n°3

1. a. On a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.
- b. On a : $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, donc les points A, B, C et D sont aussi coplanaires.

2. a. On a $\frac{x_{\vec{w}}}{x_{\vec{u}}} \neq \frac{y_{\vec{w}}}{y_{\vec{u}}}$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

b. On résout :

$$\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2n = 4 \\ m - 2n = -1 \\ m - n = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 + n \\ -2 + n = 4 \\ 2 - n = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = 3 \end{cases}$$

Il est donc impossible de trouver deux réels m et n tels que $\vec{u} = m\vec{v} + n\vec{w}$.

- b. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ étant non nuls, c'est donc que les trois vecteurs ne sont pas coplanaires : ils forment une base de l'espace.

Corrigé Entraînement n°4

1. a. $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas colinéaires, car l'ordonnée de $\overrightarrow{CE}$ est nulle et non celle de $\overrightarrow{CD}$

b. $\overrightarrow{CF} = a\overrightarrow{CE} + b\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 2b = 3 \\ b = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 4 = 3 \\ b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$

Le système a bien une solution, et on a $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE} + 2\overrightarrow{CD}$

- c. Les vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires, donc les points C, D, E et F sont aussi coplanaires.

2. a. $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 - 3 + 8 \\ -6 + 6 + 0 \\ 7 - 9 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

- b. $\vec{u} - 3\vec{v} + 2\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = 3\vec{v} - 2\vec{w}$ donc les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires