

Corrigé Exercice 22

1) a. $\Phi(0) = 0$ et $\Phi'(a) = \ln a + 1$

b. $\ln a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln a \geq -1 \Leftrightarrow a \geq e^{-1}$.

On obtient le tableau ci-contre.

a	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	
$\Phi'(a)$		-	0	+
$\Phi(a)$	0	$\searrow$	$\Phi\left(\frac{1}{e}\right)$	$\nearrow$

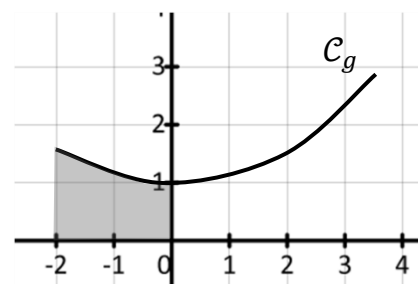
(Remarque : $\ln t + 1$ a pour primitive $t \ln t$ puisque $(t \ln t)' = 1 \ln t + t \times \frac{1}{t} = \ln t + 1$. Donc en fait $\Phi(a) = a \ln a + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.)

2) De l'étude graphique de la courbe $\mathcal{C}_g$ on voit que $g(x) > 0$. Or $G' = g$ donc si la dérivée de G est positive, la fonction **G est strictement croissante** $\Rightarrow$ On peut **éliminer la courbe 1**

On sait aussi que, comme $G(x) = \int_{-2}^x g(t)dt$, on a **$G(-2) = 0$** $\Rightarrow$ On peut **éliminer la courbe 3**

Enfin, en regardant l'aire entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 0$ (aire grisée) on voit que $F(0) = \int_{-2}^0 g(t)dt \geq 2$ $\Rightarrow$ On peut **éliminer la courbe 4**

La seule courbe qui corresponde est la courbe 2



Corrigé Exercice 23

1) a. Proposition **fausse**, par définition $G(0) = 0$

b. Proposition **vraie** : On a $G(x) = \int_0^x G'(t)dt$

c. Proposition **fausse** : Pour tout $x \geq 0$, comme $e^{-t^2} > 0$, on a bien $G(x) > 0$.

Mais si $x \leq 0$ alors $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = -\int_x^0 e^{-t^2} dt \leq 0$

d. Proposition **vraie** : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = e^{-x^2} > 0$ donc $G(x)$ est croissante

2) a. Pour $-3 \leq x \leq 0$ on a $f(x) \leq 0$ et donc $\int_x^0 f(t)dt \leq 0$ mais $F(x) = \int_0^x f(t)dt = -\int_x^0 f(t)dt$ et donc $F(x) \geq 0$

b. Pour $0 \leq x \leq 1$ on a $f(x) \leq 0$ et donc $F(x) = \int_0^x f(t)dt \leq 0$

c. On a $F'(x) = f(x)$ donc :

x	-5	-3	1	2	
$f(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		

3) a. $H(x) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_1^x = \left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-2}\right) = \frac{1}{2}(e^{-2} - e^{-2x})$

On a par composée de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = 0$ donc, par somme de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \frac{1}{2}e^{-2}$

b. $I(x) = [-2 \ln(1-t)]_x^0 = (-2 \ln(1)) - (-2 \ln(1-x)) = 2 \ln(1-x)$

On a par composée de limites : $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \ln(1-x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} 2 \ln y = +\infty$ donc, $\lim_{x \rightarrow -\infty} I(x) = +\infty$

Corrigé Exercice 24

$$1) a. f'(x) = \frac{-e^{-x}(2-x) - (-1)e^{-x}}{(2-x)^2} = \frac{(x-1)e^{-x}}{(2-x)^2}$$

b. D'après le tableau de variation, on a bien, pour $x \in [0; 1]$,

$$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$$

x	0	1
$x - 1$	-	0
e^{-x}	+	
$(2 - x)^2$	+	
$f'(x)$	-	0
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow e^{-1}$

$$2) a. G'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}$$

$$\text{Or } G'(x) = (x + 2)e^{-x} \text{ donc on doit avoir } \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$$

$$\text{donc } G(x) = (-x - 3)e^{-x}$$

$$\text{On a alors } J = \int_0^1 (x + 2)e^{-x} dx = G(1) - G(0) = (-1 - 3)e^{-1} - (-3)e^0 = -\frac{4}{e} + 3$$

$$b. \text{ On a } \frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{e} \leq x^2 f(x) \leq \frac{x^2}{6} \text{ et donc } \int_0^1 \frac{x^2}{e} dx \leq K \leq \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx$$

$$\text{Or } \int_0^1 \frac{x^2}{e} dx = \left[\frac{x^3}{3e} \right]_0^1 = \frac{1}{3e} \text{ et } \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \text{ On a donc bien } \frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$$

$$c. J + K = \int_0^1 (x + 2)e^{-x} dx + \int_0^1 x^2 \frac{e^{-x}}{2-x} dx = \int_0^1 \left(x + 2 + \frac{x^2}{2-x} \right) e^{-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{4-x^2+x^2}{2-x} \right) e^{-x} dx \\ = \int_0^1 \frac{4e^{-x}}{2-x} dx = 4 \times \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2-x} dx = 4I \quad \text{CQFD}$$

$$d. \text{ On a } I = \frac{1}{4}(J + K) \Rightarrow \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{e} + 3 + \frac{1}{3e} \right) \leq I \leq \frac{1}{4} \left(-\frac{4}{e} + 3 + \frac{1}{6} \right) \Leftrightarrow \frac{9e-11}{12e} \leq I \leq \frac{19e-24}{24e}$$

Et en calculant à 0,01 près : **0,41** $\leq I \leq$ **0,42**