

Correction Sujet d'entraînement n°3

Corrigé Exercice 9

1. a. Le plan (ABC) a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \times 3 + 3 \times 2 + 0 = -6 + 6 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 \times 3 + 0 \times 2 + 1 \times 6 = -6 + 6 = 0$
 $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs directeurs, il est donc normal au plan (ABC)

b. $\vec{n}$ est un vecteur normal, donc l'équation du plan (ABC) est du type $3x + 2y + 6z + d = 0$

Comme $A \in (ABC)$, on a $3x_A + 2y_A + 6z_A + d = 0 \Leftrightarrow 6 + 0 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$

Donc le plan (ABC) a bien pour équation cartésienne : $3x + 2y + 6z - 6 = 0$.

2. a. La droite d est orthogonale à (ABC) : elle a donc pour vecteur directeur $\vec{n}$. Comme elle passe par O , on a

pour représentation paramétrique de d : $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

b. On cherche à résoudre le système $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 6t \\ 3x + 2y + 6z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3 \times 3t + 2 \times 2t + 6 \times 6t - 6 = 0$
 $\Leftrightarrow 49t = 6 \Leftrightarrow t = \frac{6}{49}$

On remplace dans la représentation paramétrique de d : $\begin{cases} x = 3 \times \frac{6}{49} = \frac{18}{49} \\ y = 2 \times \frac{6}{49} = \frac{12}{49} \\ z = 6 \times \frac{6}{49} = \frac{36}{49} \end{cases}$

Le point $H \left(\frac{18}{49}; \frac{12}{49}; \frac{36}{49} \right)$ est bien le point d'intersection de la droite d et du plan (ABC) .

c. $OH = \sqrt{\left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{12}{49}\right)^2 + \left(\frac{36}{49}\right)^2} = \sqrt{\frac{1764}{49^2}} = \frac{42}{49}$

3. En considérant la base OBC , la pyramide a pour hauteur OA .

On a alors $V_{OABS} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{OBC} \times OA = \frac{1}{3} \times \frac{OB \times OC}{2} \times OA = \frac{1}{6} \times 1 \times 3 \times 2 = 1$

En considérant la base ABC , la pyramide a pour hauteur OH .

On a alors $V_{OABS} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times OH = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times \frac{42}{49}$

Des deux expressions, on en déduit $\frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABC} \times \frac{42}{49} = 1 \Leftrightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{49 \times 3}{42} = \frac{49}{14}$

Corrigé Exercice 10

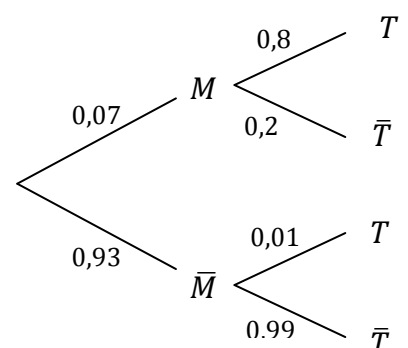
1. $\Rightarrow$

2. a. $p(M \cap T) = p(M) \times p_M(T) = 0,07 \times 0,8 = 0,056$

Il y a 5,6 % de chances que la personne soit infectée et que son test soit positif

b. $p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) = 0,056 + 0,93 \times 0,01 = 0,0653$

La probabilité que le test soit positif est bien de 6,53 %



$$3. p_T(M) = \frac{p(M \cap T)}{p(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \simeq 0,86$$

Il y a environ 86 % de chance que la personne soit infectée

4. a. Il s'agit de la répétition de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès $p = 0,0653$. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,0653$

$$b. p(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1 - 0,0653)^{10-2} = 45 \times 0,0653^2 \times 0,9347^8 \simeq 0,11$$

Il y a environ 11 % de chances que deux personnes aient un test positif.

5. Soit la variable aléatoire Y qui compte le nombre de personnes positives parmi n personnes. Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,0653$

On cherche n tel que $p(Y \geq 1) \geq 0,99$

$$\Leftrightarrow 1 - p(Y = 0) \geq 0,99 \Leftrightarrow p(Y = 0) \leq 1 - 0,99 \Leftrightarrow p(Y = 0) \leq 0,01$$

$$\text{Or } p(Y = 0) = 0,9347^n$$

On cherche donc à résoudre $0,9347^n \leq 0,01$

$$\Leftrightarrow \ln(0,9347^n) \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \ln(0,9347) \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \quad \text{car } \ln 0,9347 < 0$$

or on a $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,9347} \simeq 68,2$ On en déduit donc $n \geq 69$

Il faudra tester au moins 69 personnes pour avoir plus de 99 % de chances d'avoir au moins une personne positive.

Corrigé Exercice 11

Partie A .

1. D'une année sur l'autre, le nombre d'individus v_n croît de 5 %, c'est-à-dire est multiplié par $\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1,05$.

On a donc $u_{n+1} = 1,05u_n$

Il s'agit d'une suite **géométrique** de raison 1,05

et de 1^{er} terme $v_0 = 12$

$$\text{Alors } v_n = v_0 \times q^n = 12 \times 1,05^n$$

2. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ car la raison $1,05 > 1$. Donc sur une très longue durée, le nombre d'individu ne cesserait de croître, ce qui contredit la limite de 60 000 individus imposée par les contraintes du milieu naturel. **Ce modèle n'est donc pas satisfaisant**

Partie B

1. a. La fonction g est un polynôme du 2nd degré, avec $a < 0$ avec $x_0 = -\frac{1,1}{2 \times \left(-\frac{1,1}{605}\right)} = \frac{605}{2}$

g est donc croissante sur $\left]-\infty; \frac{605}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{605}{2}; +\infty\right[$: donc **g est bien croissante sur $[0 ; 60]$** .

(vous pouvez aussi dériver et faire le tableau de signe et tableau de variation si les fonctions du 2nd degré ne sont pas assez fraîches dans votre tête)

$$b. g(x) = x \Leftrightarrow -\frac{1,1}{605}x^2 + 1,1x = x \Leftrightarrow -\frac{1,1}{605}x^2 + 0,1x = 0 \Leftrightarrow x \left(-\frac{1,1}{605}x + 0,1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{soit } x = 0 \quad \text{soit } -\frac{1,1}{605}x + 0,1 = 0 \quad \text{donc } x = -\frac{0,1}{-\frac{1,1}{605}} = \frac{60,5}{1,1} = 55$$

Donc $S = \{0 ; 55\}$

Vous pouvez aussi passer par le calcul du delta..

2. a. $u_1 = g(u_0) = g(12) \approx 12,938$ En 2017, la population est de 12 938 individus

b. Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 12$ on a bien $0 \leq u_0 \leq 55$ la propriété est **vraie pour $n = 0$**

Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $0 \leq u_p \leq 55$.

Hérédité : On a $0 \leq u_p \leq 55$ par hypothèse, et comme g est croissante sur $[0; 60]$ on a :

$$g(0) \leq g(u_p) \leq g(55) \Leftrightarrow 0 \leq u_{p+1} \leq 55$$

Donc la propriété est aussi vraie pour $p + 1$: elle est héréditaire

Conclusion : pour tout entier naturel n on a : $0 \leq u_n \leq 55$.

c. On cherche à démontrer par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = 12$ et $u_1 \approx 12,9$ on a bien $u_0 \leq u_1$ la propriété est **vraie pour $n = 0$**

Hypothèse de récurrence : on suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $u_p \leq u_{p+1}$

Hérédité : On a $u_p \leq u_{p+1}$ par hypothèse, et d'après la question précédente $0 \leq u_p \leq u_{p+1} \leq 55$

comme g est croissante sur $[0; 60]$ on a : $g(u_p) \leq g(u_{p+1}) \Leftrightarrow u_{p+1} \leq u_{p+2}$

Donc la propriété est aussi vraie pour $p + 1$: elle est héréditaire

Conclusion : pour tout entier naturel n on a : $u_n \leq u_{n+1}$ et la suite (u_n) est croissante

d. La suite (u_n) est croissante et minorée par 55 : d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est donc **convergente**.

e. On a résolu l'équation $g(\ell) = \ell$ à la question 1b. On a donc soit $\ell = 0$ soit $\ell = 55$

Or on sait que, comme la suite est croissante, $\ell \geq u_0$ donc $\ell \geq 12$ la solution $\ell = 0$ ne correspond pas.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 55$.

Au bout d'un grand nombre d'année, la population va se stabiliser autour de 55 000 individus

3.

$n = 0$

$u = 12$

WHILE $u < 50$:

$$u = -\frac{1,1}{605} u ** 2 + 1,1u$$

$$n = n + 1$$

Return n

Corrigé Exercice 12

Partie 1

1. On a

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

La fonction f semble croissante sur $] -\infty; -1]$ et décroissante sur $[-1; +\infty[$

2.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	concave		convexe

La fonction f semble concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$

Partie 2

$$f(x) = (x + 2)e^{-x}$$

1. $f(x) = xe^{-x} + 2e^{-x} = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$ CQFD

On sait par croissance comparée que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par inverse de limite, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+$
 Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} = 0^+$ donc, par somme de limites, on a **$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$**

Donc la droite d'équation **$y = 0$ est asymptote** à la courbe $\mathcal{C}$ e, $+\infty$

On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. $f'(x) = 1e^{-x} + (x + 2)(-e^{-x}) = (1 - x - 2)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x}$ CQFD

b.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$-x - 1$		$+$ 0 $-$	
e^{-x}		$+$ $ $ $+$	
$f'(x)$		$+$ 0 $-$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	e	$\searrow$ $-\infty$

Avec $f(-1) = (-1 + 2)e^{-(-1)} = e$

c. On a $f(-2) = 0 < 2$ et $f(-1) = e > 2$. Comme f est continue et strictement croissante sur $[-2; -1]$, avec $2 \in [f(-2); f(-1)]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation **$f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[-2; -1]$.**

À la calculatrice, par balayage, on obtient **$\alpha \simeq -1,6$**

3. $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$ donc $f''(x) = (-1)e^{-x} + (-x - 1)(-e^{-x}) = (-1 + x + 1)e^{-x} = xe^{-x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x		$-$ 0 $+$	
e^{-x}		$+$ $ $ $+$	
$f''(x)$		$-$ 0 $+$	
$f(x)$	Concave		Convexe

On a bien, comme trouvé graphiquement, la fonction **f est concave sur $] -\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.**

En $x = 0$, la dérivée s'annule et change de sens : le point A d'abscisse 0 est donc un **point d'inflexion pour la courbe $\mathcal{C}$**