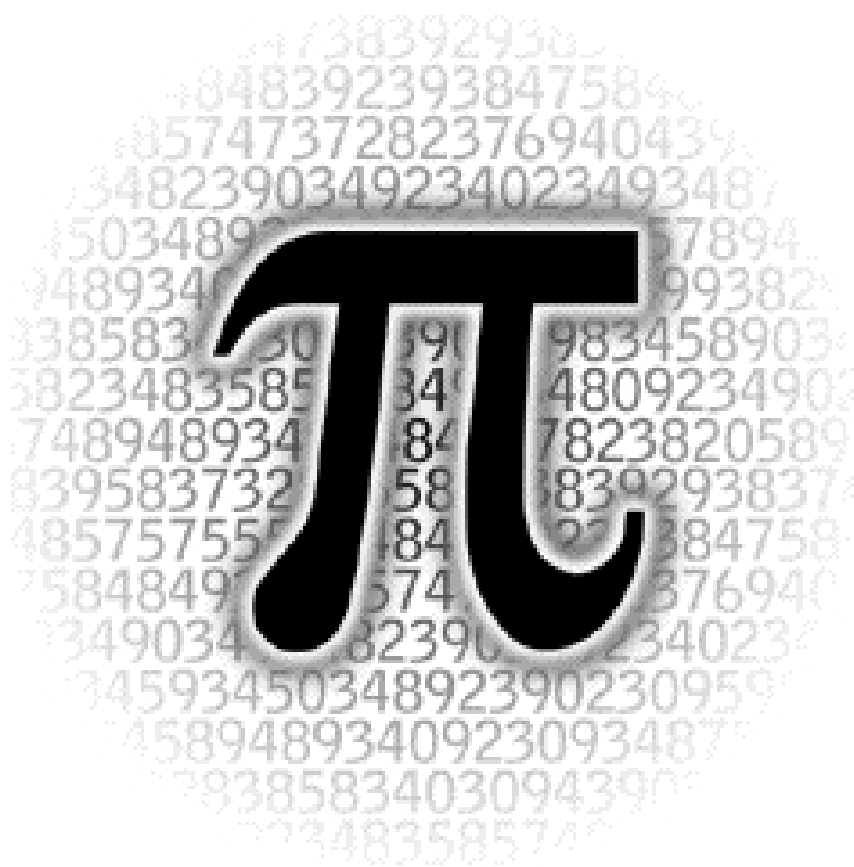


Chapitre 9

Trigonométrie & fonctions trigonométriques

Savoirs

- Tf. 1** Cercle trigonométrique et angles remarquables
- Tf. 2** Sinus et cosinus sur un cercle trigonométrique
- Tf. 3** Fonctions sinus et cosinus : représentations & calcul d'images
- Tf. 4** Fonctions sinus et cosinus : dérivation

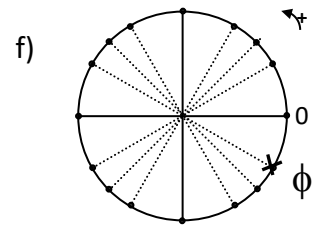
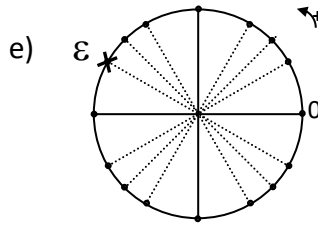
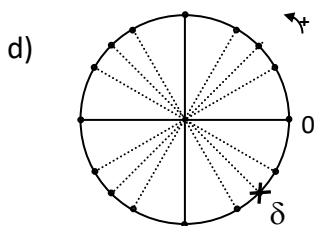
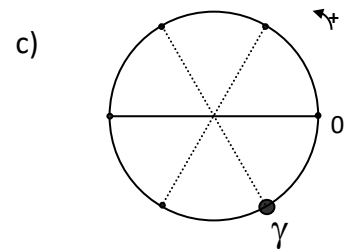
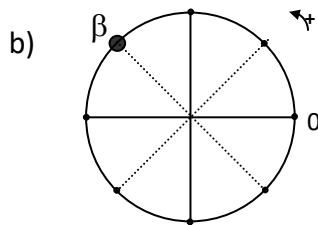
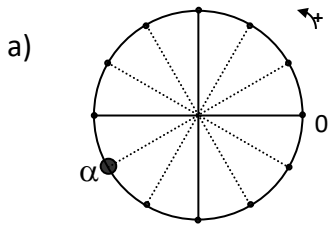


EXERCICES en classe

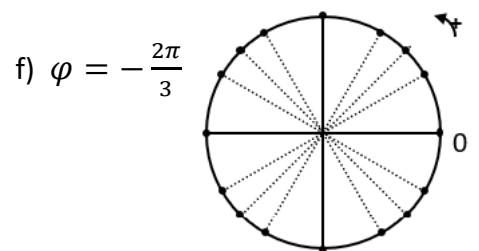
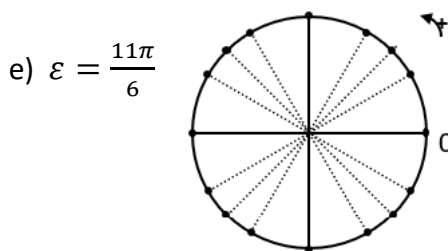
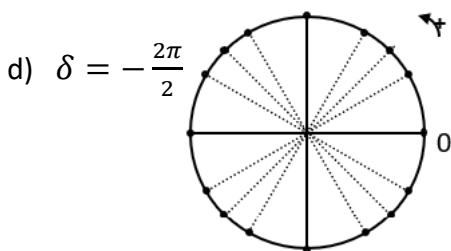
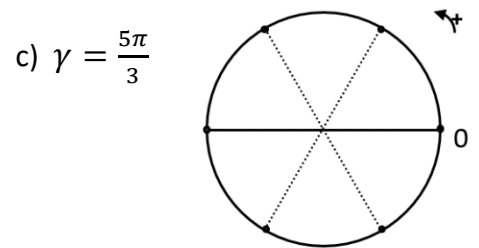
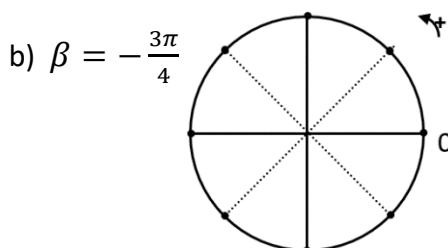
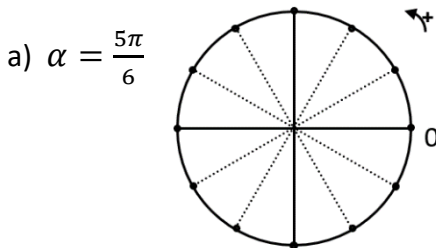
Savoir Tf. 1 : Cercle trigonométrique & angles remarquables

Exercice 1 : Lire et placer un angle sur un cercle fractionné

1) Lire les angles placés sur les cercles « gradués », en donnant si besoin les deux valeurs, dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ et dans $]-\pi, \pi]$



2) Placer les angles sur les cercles « fractionnés »

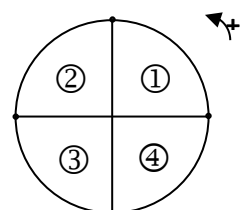


Exercice 2 : Dans quel quart de cercle ?

Préciser dans quel quart de cercle se situent les points correspondant aux angles suivants ?

$$\alpha = \frac{7\pi}{5} \quad \beta = \frac{9\pi}{13} \quad \gamma = -\frac{3\pi}{17} \quad \delta = \frac{11\pi}{7} \quad \varepsilon = \frac{15\pi}{8} \quad \theta = \frac{13\pi}{10}$$

Selon la figure ci-contre, le 1^{er} quart de cercle est celui correspondant à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
le 2^{ème} à $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, le 3^{ème} à $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ ou $]-\pi; -\frac{\pi}{2}]$ et le 4^{ème} et dernier à $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ ou $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$



Recherche 1 : Dans une figure

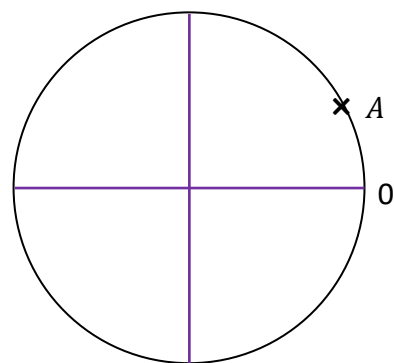
On considère un cercle trigonométrique.

On a placé le point A correspondant à l'angle $\frac{\pi}{6}$

1) Placer les points :

- a) A_1 symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées
- b) A_2 symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses
- c) A_3 symétrique de A par rapport au point O

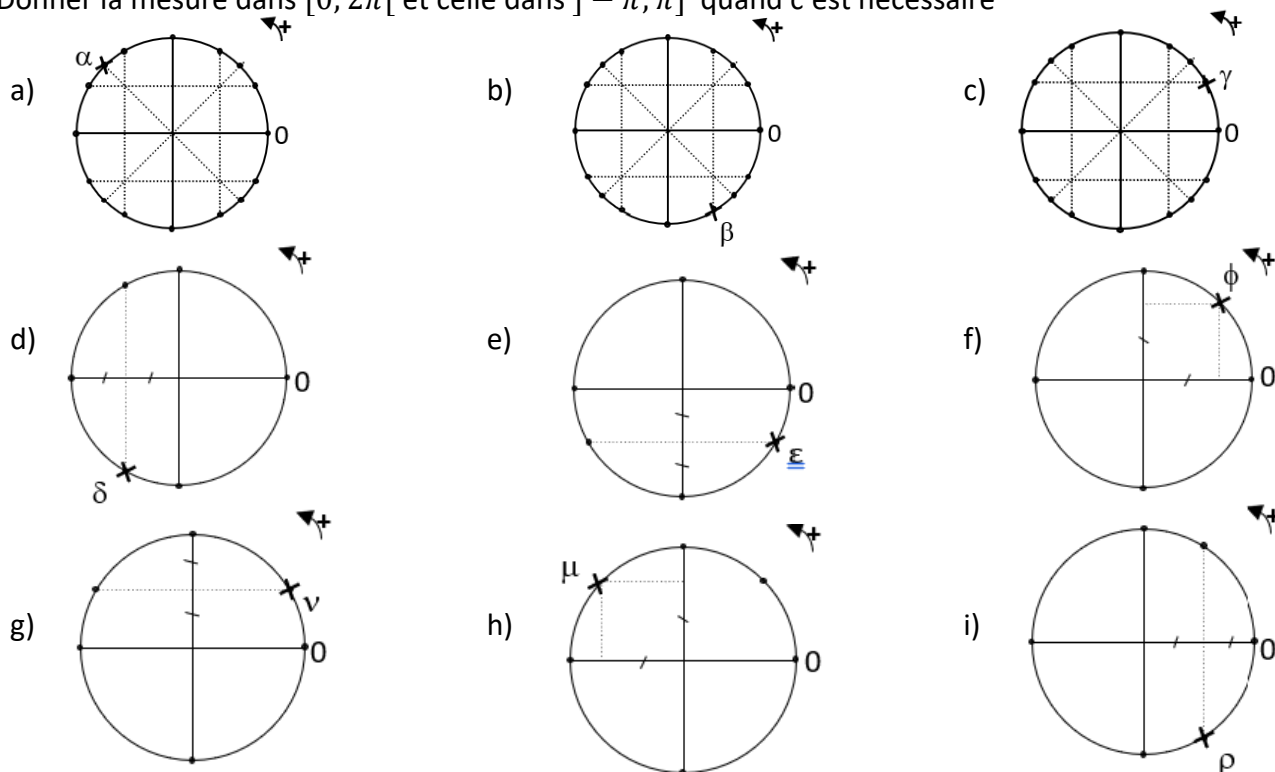
2) Donner les angles correspondants aux points A_1 ; A_2 et A_3



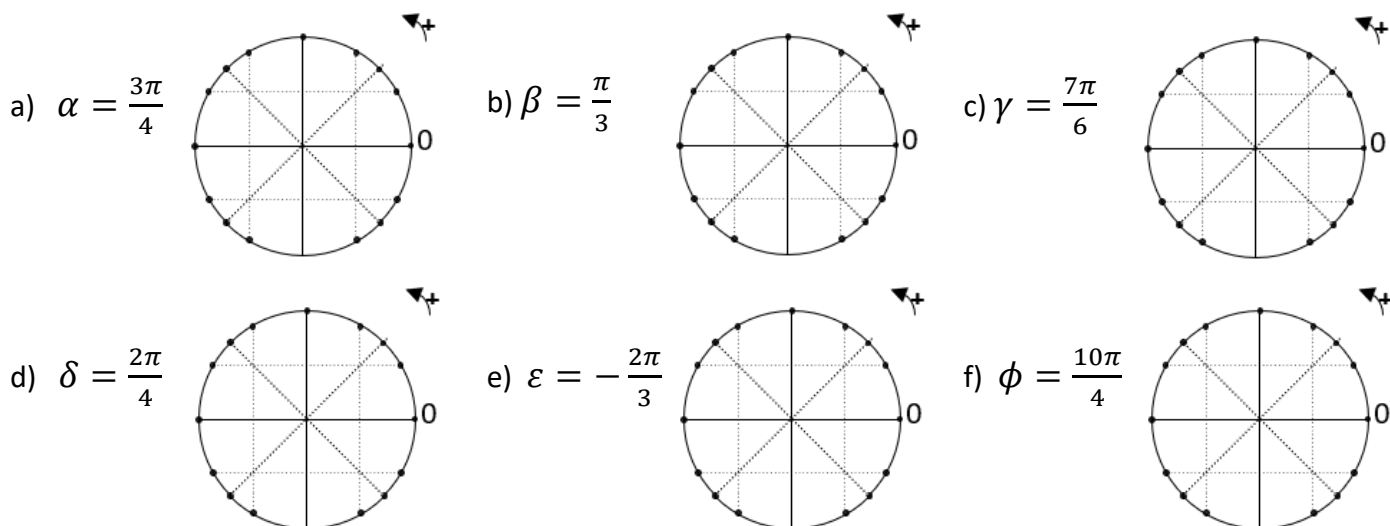
Exercice 3 : Lire et placer un angle à partir des coordonnées

1) Lire les angles placés sur les cercles à partir des coordonnées.

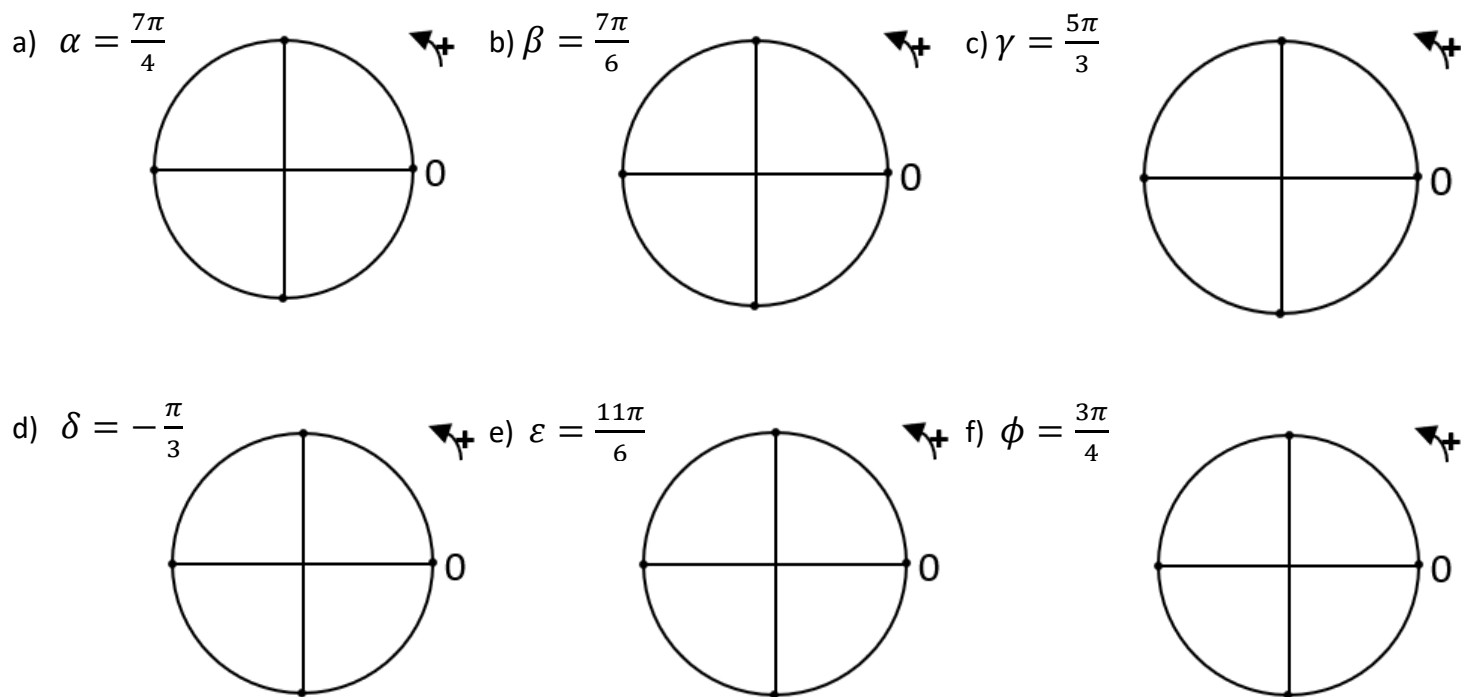
Donner la mesure dans $[0; 2\pi[$ et celle dans $] - \pi; \pi]$ quand c'est nécessaire



2) Placer les angles sur les cercles à partir des coordonnées.



3) Placer les angles sur les cercles à partir des coordonnées... Attention, c'est à vous de calculer les milieux pour tracer correctement !



Exercice 4 : Conversion degrés/radians

1) Donner la mesure en degré des angles suivants :

$$\alpha = \frac{2\pi}{5}$$

$$\beta = \frac{3\pi}{8}$$

$$\gamma = \frac{\pi}{12}$$

2) Donner la mesure en radians (fraction irréductible) des angles suivants :

$$\alpha = 10^\circ$$

$$\beta = 225^\circ$$

$$\gamma = 80^\circ$$

Exercice 5 : Angles dans un triangle (en radian !)

1) Un triangle ABC a comme angles $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$ et $\hat{B} = \frac{\pi}{5}$. Donner la mesure de l'angle $\hat{C}$ en radians.

2) a) ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. Donner la mesure de ses 3 angles en radians.

b) ABC est un triangle rectangle en A. On a $\hat{B} = \frac{\pi}{9}$. Donner la mesure des angles $\hat{A}$ et $\hat{C}$ en radians.

c) ABC est un triangle isocèle en A. On a $\hat{A} = \frac{\pi}{5}$. Donner la mesure des angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ en radians.

Savoir Tf. 2 : Sinus et cosinus sur le cercle trigonométrique

Exercice 6 Sinus et cosinus d'un angle

1) Déterminer les nombres suivants (valeurs exactes):

a) $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

b) $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

c) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

e) $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

f) $\sin(0)$

g) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

h) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

i) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

2) Donner les cosinus et sinus des angles suivants :

a) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

b) $\beta = 0$

c) $\gamma = \frac{8\pi}{6}$

Exercice 7 Déterminer un angle à partir de ses sinus et cosinus

1) Déterminer la mesure de l'angle défini par :

a) $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \cos \beta = \frac{1}{2} \\ \sin \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \cos \gamma = -1 \\ \sin \gamma = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \cos \delta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \delta = -\frac{1}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \cos \delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \delta = \frac{1}{2} \end{cases}$

g) $\begin{cases} \cos \varepsilon = 0 \\ \sin \varepsilon = 1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} \cos \phi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \phi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

i) $\begin{cases} \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

j) $\begin{cases} \cos \delta = -\frac{1}{2} \\ \sin \delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

2) Déterminer les angles correspondants aux points suivants :

a) $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $N\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c) $P(0; 1)$

d) $R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

e) $S\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Exercice 8 : Quel signe ?

Déterminer à quel quart du cercle appartiennent les angles, puis donner le signe des nombres suivants :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

b) $\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)$

c) $\sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$

d) $\cos\left(-\frac{4\pi}{7}\right)$

e) $\cos\left(\frac{19\pi}{10}\right)$

f) $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

Exercice 9 : À la calculatrice, valeurs approchées

Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au centième des nombres suivants :

a) $\cos\left(\frac{7\pi}{11}\right)$

b) $\sin\left(\frac{13\pi}{5}\right)$

c) $\sin\left(\frac{9\pi}{7}\right)$

Recherche 4 : La tangente

On appelle tangente d'un angle le nombre : $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ pour toute valeur de α , sauf $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$

Calculer les tangentes des angles suivants :

a) $\tau = \pi$

b) $\theta = \frac{\pi}{6}$

c) $\phi = \frac{5\pi}{3}$

d) $\kappa = \frac{3\pi}{2}$

e) $\omega = \frac{11\pi}{6}$

Recherche 5 : Dans une figure

Dans un repère (O, I, J) on considère le cercle trigonométrique.

1) Placer les points M de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et A de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{MOA}$

3) Placer les points T de coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ et H de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4) Quelle est la nature du quadrilatère MATH ?

Recherche 6: Dans une figure (bis)

Soit ABCDEFG un heptagone régulier dont les sommets se trouvent sur le cercle trigonométrique. On a donc $AB = BC = CD = \dots = GA$ et $OA = OB = \dots = OG = 1$.

1) a. Déterminer l'angle $\alpha = \widehat{AOB}$

b. Donner, en fonction de $\cos \alpha$ et de $\sin \alpha$ les coordonnées du point B

2) a. Déterminer l'angle $\beta = \widehat{AOF}$

b. Donner, en fonction de $\cos b$ et de $\sin b$ les coordonnées du point F

3) Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée des coordonnées des points B et F.

Recherche 7: Équations trigonométriques

1) a) Déterminer tous les angles x dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ qui vérifient l'équation $\cos x = -\frac{1}{2}$

b) Même question, mais pour $x \in]-\pi; \pi]$

2) Déterminer tous les angles θ dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ qui vérifient l'équation $\sin \theta = \frac{1}{2}$

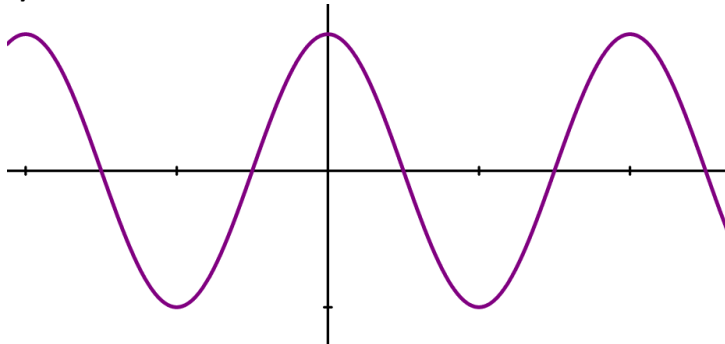
3) Résoudre de même, dans $[0; 2\pi]$ les équations : a) $\cos x = 0$ b) $\cos x = 1$ c) $\sin x = 0$

Savoir Tf. 3 : Fonctions trigonométriques - Images

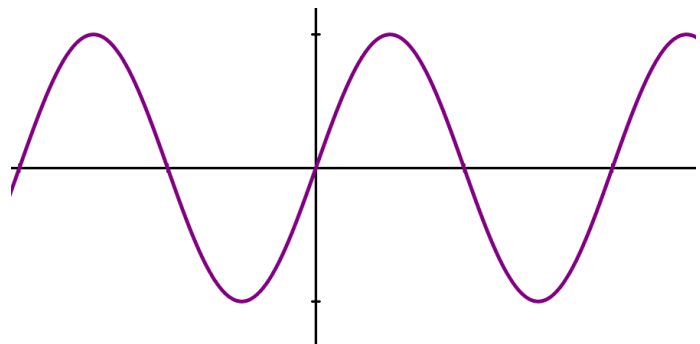
Exercice 10 : Représentations graphiques

1) Identifier la courbe de la fonction sinus et celle de la fonction cosinus, et rajouter sur les graphiques les principales valeurs remarquables.

a)

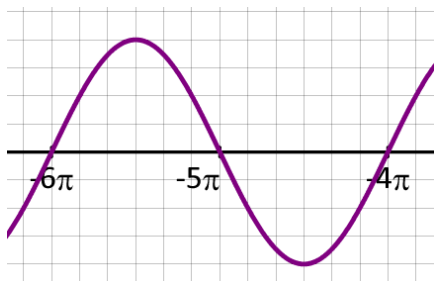


b)

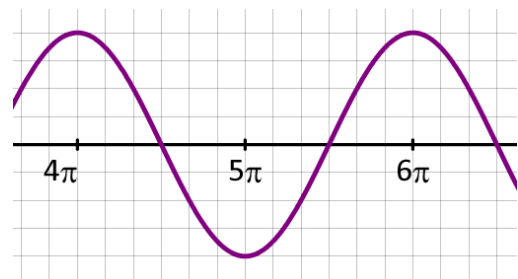


2) Identifier s'il s'agit d'une courbe de la fonction sinus ou de la fonction cosinus.

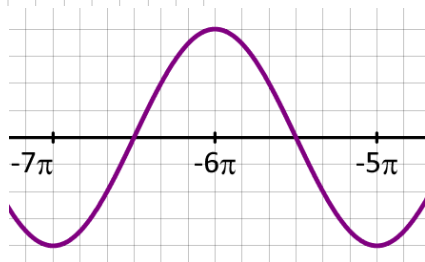
a)



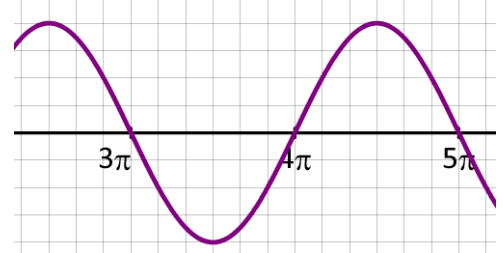
b)



c)



d)



Exercice 11 : Sens de variation et signes

1) Déterminer le tableau de variations des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

2) a) Déterminer le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[-\pi; 0]$

b) Déterminer le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[\pi; 2\pi]$

3) Déterminer le tableau de signes des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

4) a) Déterminer le tableau de signes de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\pi; 0]$

b) Déterminer le tableau de signes de la fonction sinus sur l'intervalle $[\pi; 2\pi]$

Recherche 11 : Tableaux de signes

Déterminer le tableau de signes des fonctions suivantes, sur l'intervalle demandé

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x \sin x$ sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$

b) $g(x) = (2x - \pi) \cos x$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$

c) $h(x) = \cos x \sin x$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Exercice 12 : Calcul d'images

- a) On donne $f(x) = \frac{2}{x} \cos x$. Déterminer les valeurs exactes de $f(\pi)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.
- b) Soit $g(x) = 1 - \cos(2x)$. Calculer la valeur exacte, puis la valeur approchée au centième, de $g\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
- c) On a $h(x) = \cos x \sin x$. Déterminer les valeurs exactes des images de $\frac{\pi}{4}$ puis de $\frac{\pi}{6}$ par la fonction h .
- d) Soit la fonction i définie par $i(x) = \frac{1}{2} + \sin\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$. Calculer $i(\pi)$ et $i\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
- e) On donne la fonction $j(x) = 2(\cos(x\pi) + 1)e^x$. Calculer les valeurs exactes de $j(0)$; $j(1)$ et $j(2)$

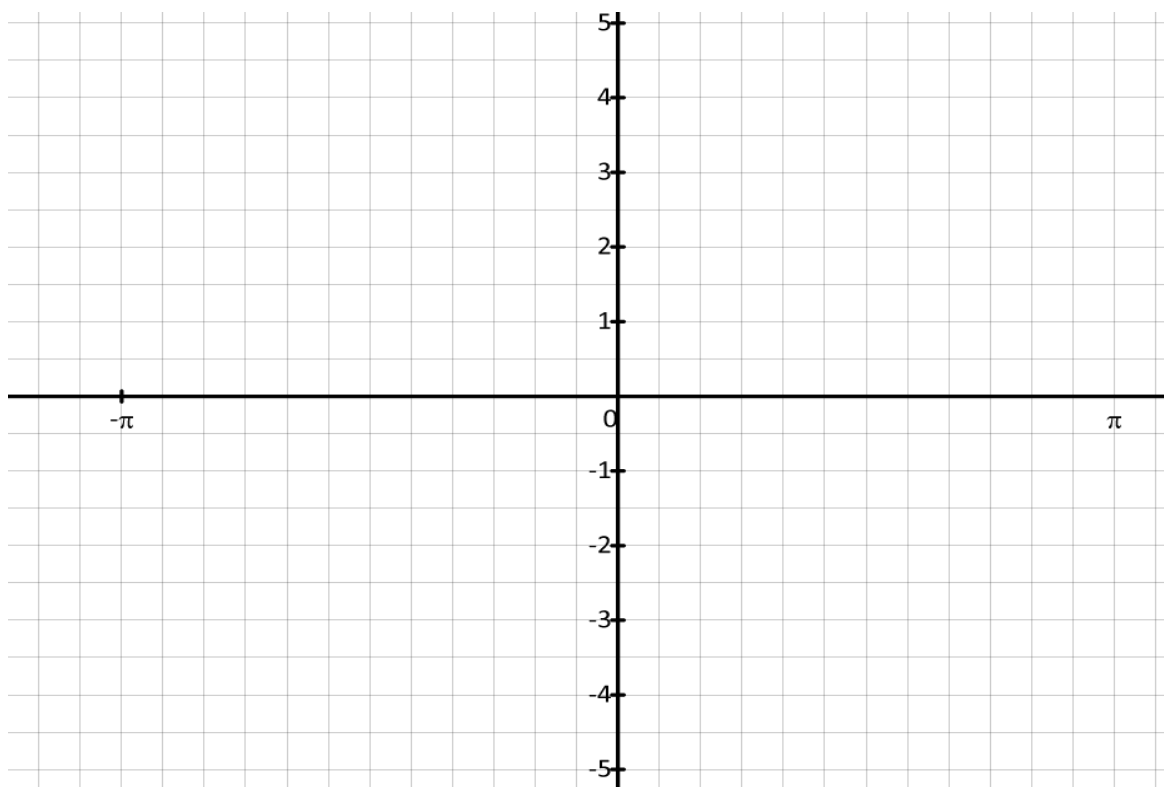
Recherche 12 : Fonction tangente

On rappelle que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a : $\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$

1) Compléter le tableau ci-dessous avec les valeurs exactes :

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin t$									
$\cos t$									
$\tan t$									

2) À l'aide du tableau, tracer le graphe de la fonction tangente sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$



3) Déterminer graphiquement le tableau de signe et le tableau de variation de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Savoir Tf. 4 : Fonctions trigonométriques : dérivation

Exercice 13 : Calcul de dérivées

1) Dériver les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \cos x & g(x) &= 2 \sin x - \cos x & h(x) &= \sin(x) \cos(x) & i(x) &= x^2 \sin x \\ j(x) &= \cos x (1 - \sin x) & k(x) &= \tan x \text{ pour } x \neq \frac{k\pi}{2} & l(x) &= \cos^2 x & m(x) &= \cos^2 x + \sin^2 x \end{aligned}$$

2) Déterminer les tableaux de variations (valeurs exactes) des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

$$f(x) = \sin^2 x \text{ sur } [0; \pi] \quad g(x) = x - 2 \cos x \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right] \quad h(x) = \frac{2 \cos x}{2 + \cos x} \text{ sur } [0; 2\pi]$$

Exercice 14 : Équations et inéquations avec $\cos x$ et $\sin x$

1) On donne les fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$

a) Résoudre $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ b) Résoudre $f(x) = 1$ et $g(x) = -1$

2) On donne les fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $h(x) = \frac{1}{2} - \cos x$ et $i(x) = 2 \sin x + \sqrt{3}$

a) Résoudre $h(x) = 0$ et $i(x) = 0$ b) Déterminer $h(0)$ et $i(0)$

3) On donne les fonctions définies sur $[-\pi; \pi]$: $j(x) = \cos x$ et $k(x) = \sin x$

a) Résoudre : $j(x) \geq 0$ et $k(x) \leq 0$ b) Résoudre : $j(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $k(x) = -\frac{1}{2}$

4) On donne les fonctions définies sur $[0; 2\pi]$: $l(x) = 2 \cos x + 1$ et $m(x) = 1 - \sin x$

a) Résoudre : $l(x) < 0$ et $m(x) \geq 0$ b) Déterminer : $l\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $m\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Exercice 15 : Signe d'une fonction trigonométrique

1) Soit f la fonction définie sur $[0; 2\pi]$ par : $f(x) = 2 \cos x + \sqrt{2}$

a) Montrer que $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) En déduire le tableau de signe de la fonction f

2) Déterminer le tableau de signe des fonctions suivantes sur l'intervalle $[0; 2\pi]$:

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad h(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad i(x) = 2 \sin x - 1$$

3) On donne la fonction g définie sur $[-\pi; \pi]$ par : $g(x) = 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1$.

Déterminer son tableau de signe.

Exercice 16 : Étude de fonctions

1) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$.

- a) Déterminer le domaine de définition de g
- b) Vérifier que g est périodique, mais n'est ni paire, ni impaire.
- c) Calculer g' . En déduire le sens de variation de g sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

2) a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $\cos x = x$

- b) Justifier que les solutions appartiennent forcément à $[-1; 1]$
- c) Étudier le sens de variation de la fonction h sur $[-1; 1]$ par $h(x) = x - \cos x$
- d) En déduire le nombre de solutions de l'équation $\cos x = x$
- e) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la ou des solution(s).

3) Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = 2x + \sin 2x$

- a) Étudier la parité de f . Interpréter graphiquement.
- b) Montrer que $f'(x) = 2(1 + \cos 2x)$
- c) Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- d) En déduire le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 17 : Application « concrète » et pas simple

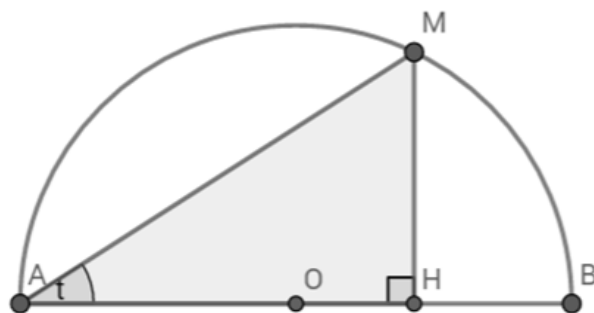
M appartient au demi-cercle de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon 1. H est le projeté orthogonal de M sur $[AB]$.

On note t la mesure en radian de $\widehat{BAM}$, telle que $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$.

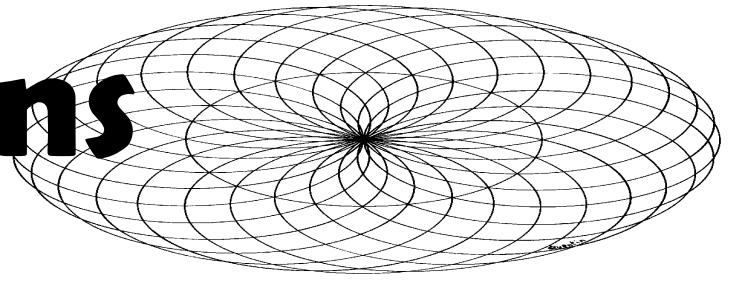
- a) Donner une mesure de radian de $\widehat{BOM}$.
- b) En déduire que l'aire du triangle HAM est égale à $f(2t)$ où $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos x) \sin x$

On admet que $f'(x) = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(1 + \cos x)$.

- c) Étudier le signe de $(1 + \cos x)$ et de $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- d) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
- e) Est-il possible que l'aire du triangle HAM soit supérieure à 0,5 ? Si oui, pour quels points M ?



Corrections



Corrigés Savoir Tf. 1

Corrigé Exercice 1 : Lire et placer un angle sur un cercle fractionné

1) a) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ ou $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$

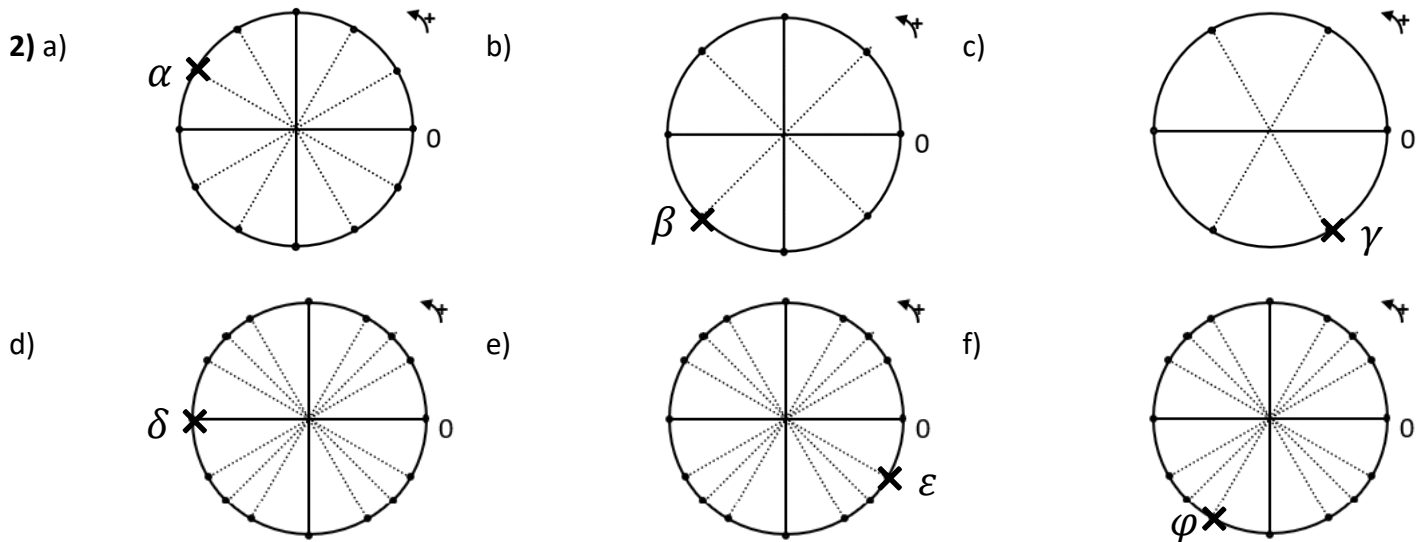
b) $\beta = \frac{3\pi}{4}$

c) $\gamma = \frac{5\pi}{3}$ ou $\gamma = -\frac{\pi}{3}$

d) $\delta = \frac{7\pi}{4}$ ou $\delta = -\frac{\pi}{4}$

e) $\varepsilon = \frac{5\pi}{6}$

f) $\phi = \frac{11\pi}{6}$ ou $\phi = -\frac{\pi}{6}$



Corrigé Exercice 2

$\alpha = \frac{7\pi}{5} \Rightarrow \frac{7}{5} = 1,4 \Rightarrow \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 3^{\text{ème}} \text{ quart}$

$\beta = \frac{9\pi}{13} \Rightarrow \frac{9}{13} \simeq 0,7 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \beta < \pi \Rightarrow 2^{\text{ème}} \text{ quart}$

$\gamma = -\frac{3\pi}{17} \Rightarrow \frac{3}{17} \simeq 0,2 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \gamma < 0 \Rightarrow 4^{\text{ème}} \text{ quart}$

$\delta = \frac{11\pi}{7} \Rightarrow \frac{11}{7} \simeq 1,6 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \delta < 2\pi \Rightarrow 4^{\text{ème}} \text{ quart}$

$\varepsilon = \frac{15\pi}{8} \Rightarrow \frac{15}{8} \simeq 1,8 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \varepsilon < 2\pi \Rightarrow 4^{\text{ème}} \text{ quart}$

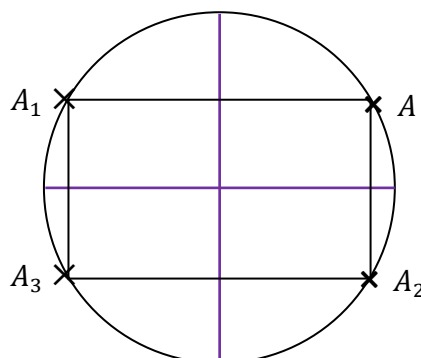
$\theta = \frac{13\pi}{10} \Rightarrow \frac{13}{10} = 1,3 \Rightarrow \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 3^{\text{ème}} \text{ quart}$

Corrigé Recherche 1

2) A_1 correspond à l'angle $\frac{5\pi}{6}$

A_2 correspond à l'angle $\frac{11\pi}{6}$

A_3 correspond à l'angle $\frac{7\pi}{6}$



Corrigé Exercice 3

1) a) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

b) $\beta = \frac{5\pi}{3}$ ou $\beta = -\frac{\pi}{3}$

c) $\gamma = \frac{\pi}{6}$

d) $\delta = \frac{4\pi}{3}$ ou $\delta = -\frac{2\pi}{3}$

e) $\varepsilon = \frac{11\pi}{6}$ ou $\varepsilon = -\frac{\pi}{6}$

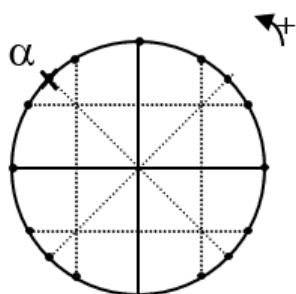
f) $\phi = \frac{\pi}{4}$

g) $\nu = \frac{\pi}{6}$

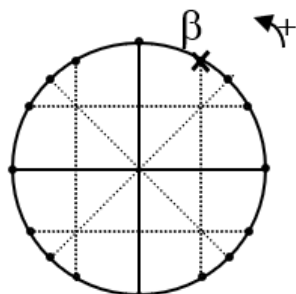
h) $\mu = \frac{3\pi}{4}$

i) $\rho = \frac{5\pi}{3}$ ou $\rho = -\frac{\pi}{3}$

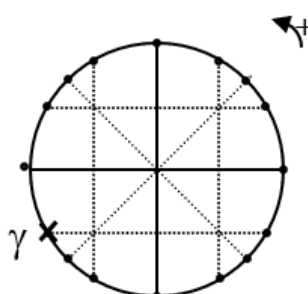
3) a)



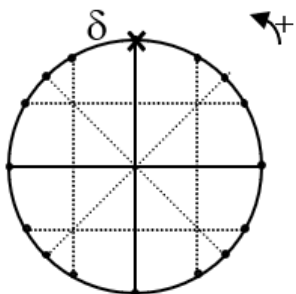
b)



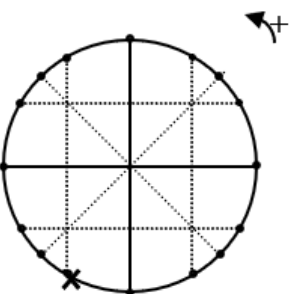
c)



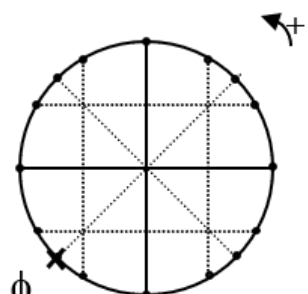
d) $\delta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$



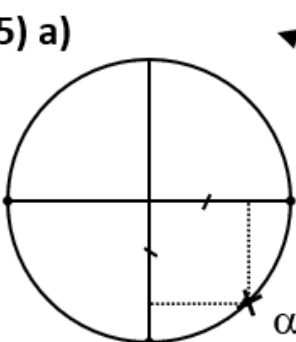
e)



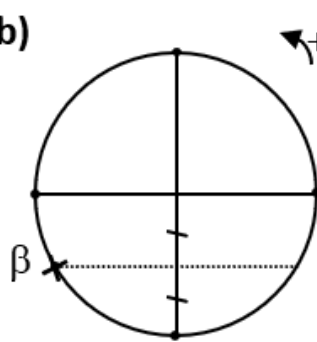
f) $\phi = \frac{10\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$



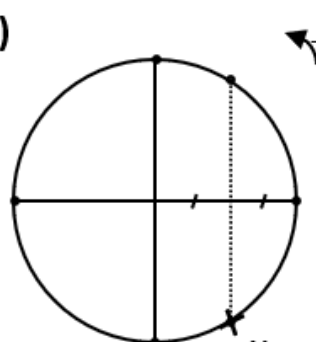
5) a)



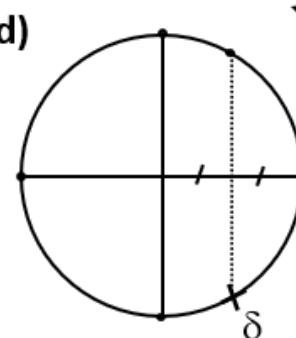
b)



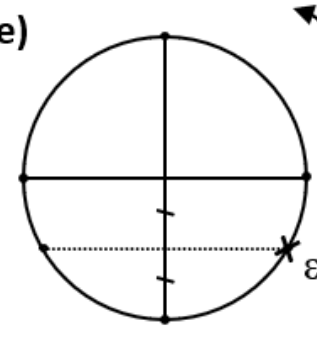
c)



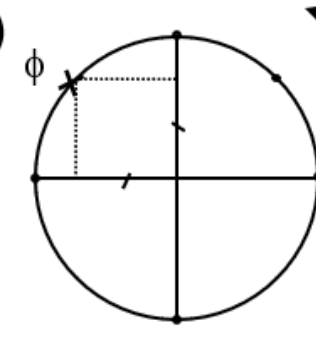
d)



e)



f)



Corrigé Exercice 4 : Conversion degrés/radians

$$1) \alpha^\circ = \frac{2\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = 72^\circ$$

$$\beta^\circ = \frac{3\pi}{8} \times \frac{180}{\pi} = 67,5^\circ$$

$$\gamma^\circ = \frac{\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = 15^\circ$$

$$2) \alpha_{\text{rad}} = 10 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$$

$$\beta_{\text{rad}} = 225 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\gamma_{\text{rad}} = -80 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{4\pi}{9}$$

Corrigé Exercice 5 : Angles dans un triangle (en radian !)

$$1) \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{5} + \hat{C} = \pi \Leftrightarrow \frac{5\pi}{15} + \frac{3\pi}{15} + \hat{C} = \pi \Leftrightarrow \hat{C} = \pi - \frac{8\pi}{15} = \frac{7\pi}{15}$$

$$2) a) \hat{A} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{4}$$

$$b) \hat{A} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9} + \hat{C} = \pi \Leftrightarrow \hat{C} = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9} = \frac{9\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}$$

$$c) \hat{B} = \hat{C} \text{ donc } \hat{A} + 2\hat{B} = \pi \Leftrightarrow 2\hat{B} = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5} \Leftrightarrow \hat{B} = \frac{4\pi}{5} \div 2 = \frac{2\pi}{5} = \hat{C}$$

Corrigés Savoir Tf. 2

Corrigé Exercice 6

$$1) a) \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$b) \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c) \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$d) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$e) \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f) \sin(0) = 0$$

$$g) \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$h) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$i) \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2) a) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad b) \cos(0) = 1 \text{ et } \sin(0) = 0$$

$$c) \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{8\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Corrigé Exercice 7

$$1) a) \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$b) \beta = \frac{5\pi}{3} \text{ ou } -\frac{\pi}{3}$$

$$c) \gamma = \pi$$

$$d) \delta = \frac{7\pi}{6} \text{ ou } -\frac{5\pi}{6}$$

$$e) \theta = \frac{3\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}$$

$$f) \delta = \frac{\pi}{6}$$

$$g) \varepsilon = \frac{\pi}{2}$$

$$h) \phi = \frac{5\pi}{4} \text{ ou } -\frac{3\pi}{4}$$

$$i) \gamma = \frac{7\pi}{4} \text{ ou } -\frac{\pi}{4}$$

$$j) \delta = \frac{2\pi}{3}$$

$$3) a) \mu = \frac{2\pi}{3}$$

$$b) \nu = \frac{7\pi}{4} \text{ ou } -\frac{\pi}{4}$$

$$c) \rho = \frac{\pi}{2}$$

$$d) \omega = \frac{11\pi}{6} \text{ ou } -\frac{\pi}{6}$$

$$e) \omega = \frac{4\pi}{3} \text{ ou } -\frac{2\pi}{3}$$

Corrigé Exercice 8

- a) $\frac{\pi}{12} \Rightarrow 1^{\text{er}} \text{ quart} : \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ positif}$ b) $\frac{9\pi}{8} \Rightarrow 3^{\text{e}} \text{ quart} : \sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) \text{ négatif}$ c) $-\frac{4\pi}{9} \Rightarrow 4^{\text{e}} : \sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right) \text{ négatif}$
- d) $-\frac{4\pi}{7} \Rightarrow 3^{\text{e}} : \cos\left(-\frac{4\pi}{7}\right) \text{ négatif}$ e) $\frac{19\pi}{10} \Rightarrow 4^{\text{e}} : \cos\left(\frac{19\pi}{10}\right) \text{ positif}$ f) $\frac{3\pi}{5} \Rightarrow 2^{\text{e}} \text{ quart} : \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \text{ positif}$

Corrigé Exercice 9

- a) $\cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) \simeq -0,42$ b) $\sin\left(\frac{13\pi}{5}\right) \simeq 0,95$ c) $\sin\left(\frac{9\pi}{7}\right) \simeq -0,78$

Si vous n'obtenez pas les bons résultats, vérifiez que votre calculatrice est réglée en radians et non en degrés...

Corrigé Recherche 4

a) $\tan(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\cos(\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$

b) $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

d) Il est impossible de calculer la tangente de $\frac{3\pi}{2}$ car

on a : $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

et on ne peut pas diviser par 0

e) $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Corrigé Recherche 5

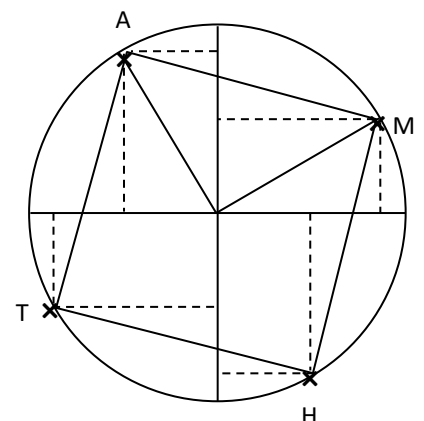
1) M correspond à l'angle $\frac{2\pi}{3}$ et A à $\frac{\pi}{6}$

2) $\widehat{MOA} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

3) T correspond à l'angle $\frac{5\pi}{6}$ et A à $\frac{5\pi}{3}$

4) Les points M et T sont symétriques par rapport à O (vu que leurs coordonnées sont opposées). De même, les points A et H sont symétriques par rapport à O. Donc O est le milieu des diagonales [MT] et [AH], le quadrilatère MATH est un parallélogramme. Les diagonales sont des diamètres, donc de longueurs égales, donc c'est un rectangle. Comme en plus (question 2), les diagonales sont perpendiculaires, c'est un losange.

MATH est donc un carré.



Corrigé Recherche 6

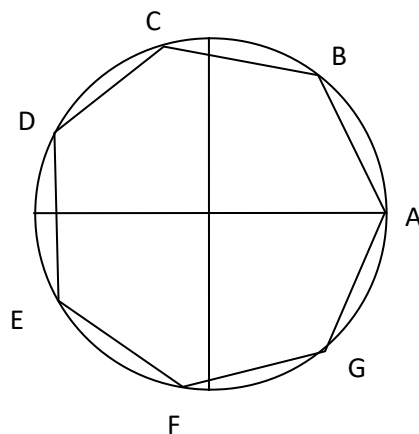
1) a. $\alpha = \widehat{AOB} = \frac{2\pi}{7}$

b. $B \left(\cos \frac{2\pi}{7}; \sin \frac{2\pi}{7} \right)$

2) a. $\beta = \widehat{AOF} = 5 \times \frac{2\pi}{7} = \frac{10\pi}{7}$

b. $F \left(\cos \frac{10\pi}{7}; \sin \frac{10\pi}{7} \right)$

3) On a les coordonnées approximatives $B (0,62 ; 0,78)$ et $F (-0,22 ; -0,97)$



Corrigé Recherche 7

1) a) On a $\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$ mais aussi $\cos \left(\frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}$. Il y a donc 2 solutions : $S = \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$

b) Cette fois $S = \left\{ \frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} \right\}$

2) On a $\sin \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$ mais aussi $\sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$. Il y a donc 2 solutions : $S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}$

3) a) $S = \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\}$

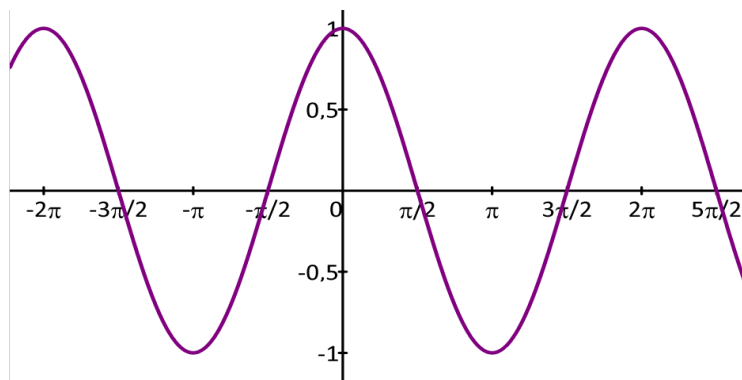
b) une seule solution $S = \{0\}$

c) $S = \{0; \pi\}$

Corrigés Savoir Tf. 3

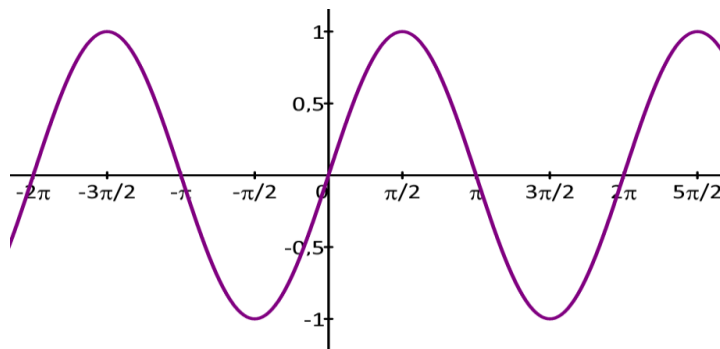
Corrigé Exercice 10

1) a) On a $f(0) = 1$ Il s'agit donc de la fonction cosinus



b) On a $f(0) = 0$

Il s'agit donc de la fonction sinus $\Rightarrow$



2) Identifier s'il s'agit d'une courbe de la fonction sinus ou de la fonction cosinus.

a) On a $f(k\pi) = 0$ Il s'agit de la **fonction sinus**

b) On a $f(k\pi) = \pm 1$ Il s'agit de la **fonction cosinus**

c) On a $f(k\pi) = \pm 1$ Il s'agit de la **fonction cosinus**

d) On a $f(k\pi) = 0$ Il s'agit de la **fonction sinus**

Corrigé Exercice 11

1)

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$-1 \nearrow$	1

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	$0 \nearrow$	$1 \searrow$	0

2) a)

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0
$\sin x$	$0 \searrow$	$-1 \nearrow$	0

b)

x	π	2π
$\cos x$	$-1 \nearrow$	1

3)

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$-$	0	$+$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

4) a)

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0
$\cos x$	$-$	0	$+$

b)

x	π	2π
$\sin x$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

Corrigé Recherche 11

a)

x	$-\pi$	0	π		
$-\frac{1}{2}x$		+	0	-	
$\sin x$	0	-	0	+	0
$f(x)$	0	-	0	-	0

b)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π			
$2x - \pi$	/	-	0	+		+	
$\cos x$		+	0	-	0	+	
$g(x)$	-	0	-	0	+		

c)

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π			
$\cos x$	0	+		+	0	-	
$\sin x$		-	0	+		+	0
$h(x)$	0	-	0	+	0	-	0

Corrigé Exercice 12

a) $f(\pi) = \frac{2}{\pi} \cos \pi = -\frac{2}{\pi}$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \times 0 = 0$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{12}{\pi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{\pi}$

b) $g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,29$

c) $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$$d) i(\pi) = \frac{1}{2} + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\text{et } i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sin\left(\pi - \frac{-\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

$$e) j(0) = 2(\cos(0) + 1)e^0 = 2 \times (1 + 1) \times 1 = 4 \quad ; \quad j(1) = 2(\cos(\pi) + 1)e^1 = 2 \times 0 \times e = 0$$

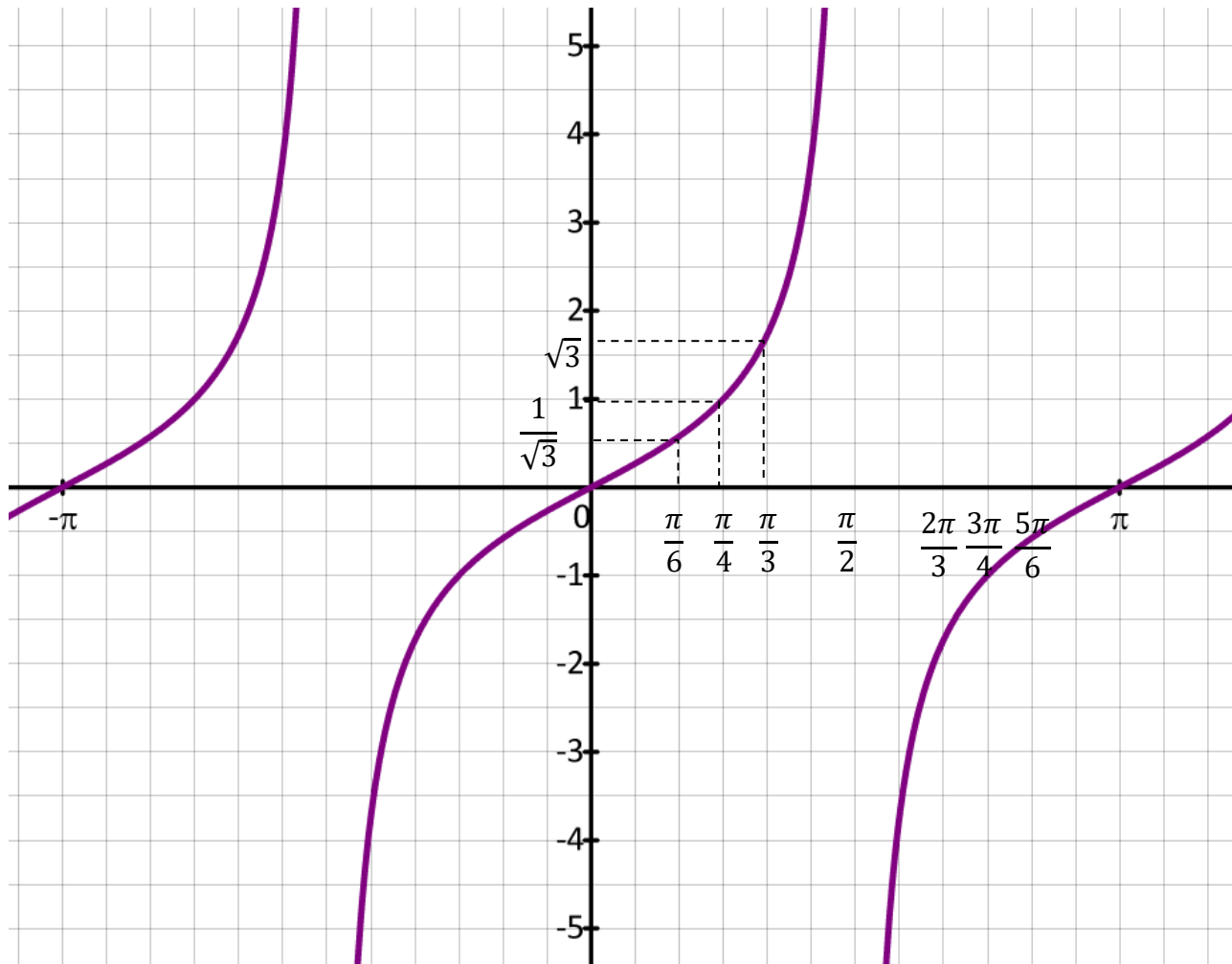
$$j(2) = 2(\cos(2\pi) + 1)e^2 = 4e^2$$

Corrigé Recherche 12 : Fonction tangente

1)

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

2)



3) Tableau de signe sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

t	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$		
$\tan t$	$ $	$-$	0	$+$	$ $

Tableau de variation sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$

t	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan t$	$ \nearrow $	

Corrigés Savoir Tf. 4

Corrigé Exercice 13

1) $f'(x) = 1 - \sin x$

$g'(x) = 2 \cos x + \sin x$

$h'(x) = \cos(x) \cos(x) + \sin(x) (-\sin(x)) = \cos^2 x - \sin^2 x$ $i'(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$

$j'(x) = -\sin x (1 - \sin x) + \cos x (-\cos x) = -\sin x + \sin^2 x - \cos^2 x$

$k(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ donc $k'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$l'(x) = 2(-\sin x) \cos^1 x = -2 \sin x \cos x$

$m(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$!!! donc $m'(x) = 0$ ☺

2) $f(x) = \sin^2 x$ sur $[0; \pi]$ donc $f'(x) = 2 \cos x \sin x$

avec $f(0) = f(\pi) = 0^2 = 0$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 1^2 = 1$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	+	0	-
$\sin x$	+	1	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	↗ 1 ↘	0

$g(x) = x - 2 \cos x$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ donc $g'(x) = 1 + 2 \sin x$ avec $1 + 2 \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -\frac{1}{2}$

Ce qui, sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, revient à $x \geq -\frac{\pi}{6}$

Avec $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} - 2 \times 0 = -\frac{\pi}{2}$, $g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$

Et $g(\pi) = \pi - 2 \times (-1) = \pi + 2$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	π
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$-\frac{\pi}{2}$ ↘	$-\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$	↗ $\pi + 2$

$h(x) = \frac{2 \cos x}{2 + \cos x}$ sur $[0; 2\pi]$ donc $h'(x) = \frac{-2 \sin x (2 + \cos x) - 2 \cos x (-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{-4 \sin x}{(2 + \cos x)^2}$

dénominateur toujours strictement positif... donc du signe opposé de $\sin x$

avec $h(0) = h(2\pi) = \frac{2 \times 1}{2 + 1} = \frac{2}{3}$ et $h(\pi) = \frac{2 \times (-1)}{2 - 1} = -2$

x	0	π	2π
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\frac{2}{3}$ ↘	-2	↗ $\frac{2}{3}$

Corrigé Exercice 14

1) a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ donc } S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
 et $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0[2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi[2\pi] \text{ donc } S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

b) $f(x) = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x \equiv 0[2\pi] \text{ donc } S = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
 et $g(x) = -1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ donc } S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) a) $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ donc}$
 $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

et $i(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \equiv \frac{-2\pi}{3}[2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ donc}$
 $S = \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $h(0) = \frac{1}{2} - \cos 0 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ et $i(0) = 2 \sin 0 + \sqrt{3} = 2 \times 0 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$

3) a) $j(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ donc } S = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
 et $k(x) \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 0 \Leftrightarrow -\pi \leq x \leq 0 \text{ donc } S = [-\pi; 0]$

b) $j(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{4} \text{ donc } S = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$
 et $k(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \text{ ou } -\frac{\pi}{6} \text{ donc } S = \left\{-\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}\right\}$

4) a) $l(x) < 0 \Leftrightarrow 2 \cos x + 1 < 0 \Leftrightarrow \cos x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ donc } S = \left]\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right[$
 et $m(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2\pi \text{ donc } S = [0; 2\pi]$

b) $l\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$ et $m\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$

Corrigé Exercice 15

1) a) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2 \cos x + \sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow 2 \cos x \geq -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) sur $[0; 2\pi]$ on a $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π	
$f(x)$	+	0	-	0	+

2) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \pi$
 $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \text{ donc, dans } [0; 2\pi]$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$f(x)$	+	0	−	0 +

$g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq 2\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{3} \text{ donc, dans } [0; 2\pi]$

x	0	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$g(x)$	+	0	−	0 +

$h(x)$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	+	0	-	+	0
$\sin x$	0	+	0	-	0
$h(x)$		+	0	-	

$$i(x) = 2 \sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	2π
$i(x)$	-	0	+	0

3) On pose $Y = \cos x$ on a alors $g(Y) = 2Y^2 - 3Y + 1$ avec $\Delta = 1$ et $Y_1 = 1$ et $Y_2 = \frac{1}{2}$
Or un polynôme du 2nd degré est du signe de a (ici positif) à l'extérieur de ses racines

On a $g(Y) \geq 0$ pour $Y \leq \frac{1}{2}$ et $Y \geq 1$

Donc $g(x)$ est positive pour : $\cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$
et $\cos x \geq 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Donc

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$g(x)$	+	0	-	0	+

Corrigé Exercice 16

1) a) $1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc $D_g = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

b) $g(x + 2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{1+\sin(x+2\pi)} = \frac{\cos x}{1+\sin x} = g(x)$ **g est 2π -périodique**

$g(-x) = \frac{\cos(-x)}{1+\sin(-x)} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \neq g(x)$ donc elle n'est **ni paire, ni impaire**.

c) $g'(x) = \frac{(-\sin x)(1+\sin x) - \cos x(\cos x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2}$

or $-\sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -1 \Leftrightarrow x \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ or ces valeurs sont exclues de l'ensemble de définition.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$
$g'(x)$		-
$g(x)$		↘

2) a) En traçant les deux fonctions $\cos x$ et x il semble n'y avoir **qu'une seule intersection**.

b) On a $\cos x \in [-1; 1]$ donc si l'équation $\cos x = x$ admet une solution, **elle appartient à $[-1; 1]$**

c) Étudier le sens de variation de la fonction h sur $[-1; 1]$ par $h(x) = x - \cos x$

$h'(x) = 1 + \sin x$ et $1 + \sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq -1$ ce qui est toujours vrai.

Donc la dérivée h' est toujours positive, et la fonction **h est strictement croissante sur $[-1; 1]$**

d) $\cos x = x \Leftrightarrow x - \cos x = 0$

On a $h(-1) = -1 - \cos(-1) \simeq -1,5$ et $h(1) = 1 - \cos(1) \simeq 0,5$

La fonction h est continue et strictement croissante sur $[-1; 1]$, avec $0 \in [h(-1); h(1)]$.

Donc, d'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α

L'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α

e) On trouve $\alpha \simeq 0,739$

3) a) $f(-x) = -2x + \sin(-2x) = -2x - \sin 2x = -(2x + \sin 2x) = -f(x)$

La fonction **f** est impaire, elle admet l'origine **O** comme centre de symétrie

b) $f'(x) = 2 + 2 \cos 2x = 2(1 + \cos 2x)$ CQFD

c) $1 + \cos 2x \geq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \geq -1$ ce qui est toujours vrai. La dérivée f' est toujours positive, donc la fonction **f** est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

d) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -\pi + \sin(-\pi) = -\pi$ et par symétrie $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\pi$	π

Corrigé Exercice 17

a) C'est la propriété de l'angle au centre : $\widehat{BOM} = 2t$

b) $\mathcal{A}(HAM) = \frac{HM \times HA}{2}$

Comme le cercle est de rayon 1, on a: $MH = \sin \widehat{HOM} = \sin(2t)$ et $OH = \cos(2t)$

Donc $HA = 1 + OH = 1 + \cos(2t)$ et $\mathcal{A}(HAM) = \frac{\sin(2t) \times (1 + \cos(2t))}{2} = \frac{1}{2} \sin 2t (1 + \cos 2t) = f(2t)$

c) $1 + \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -1$ ce qui est toujours vrai

et $\cos x - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2}$ ce qui, sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, revient à $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

d) donc

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$1 + \cos x$		+	
$\cos x - \frac{1}{2}$		+	0
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\searrow$

e) l'aire du triangle HAM est supérieure à 0,5 $\Leftrightarrow f(2t) \geq \frac{1}{2}$

D'après le tableau de variation et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et on a comme valeur approchée $\alpha \simeq 0,57$

Donc $f(2t) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \leq 2t \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

Donc pour tous les points M tels que $\widehat{BAM} \in \left[\frac{\alpha}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, l'aire du triangle HAM est supérieure à 0,5