

Savoir Pb.3 : Loi binomiale - $P(X=k)$

Entraînement n° 1

1) La variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(10; \frac{1}{3}\right)$.

Déterminer les valeurs exactes des probabilités : $p(X = 0)$; $p(X = 4)$ et $p(X = 9)$

2) Dans une population, on estime que 16 % des personnes sont gauchères. On regarde un échantillon de 35 personnes choisies au hasard. On appelle G la variable aléatoire qui compte le nombre de gauchers.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable G ? Justifier.

b. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 7 gauchers dans cet échantillon ?

Donner une valeur approchée à 0,1 %

Entraînement n° 2

1) La variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0,05$

Déterminer les valeurs exactes des probabilités : $p(X = 1)$; $p(X = 4)$ et $p(X = 6)$

2) Une loterie annonce 20% de tickets gagnants. Une personne achète 12 tickets. On appelle P la variable aléatoire qui compte le nombre de tickets perdants.

a. Quelle loi de probabilité suit la variable P ? Justifier.

b. Quelle est la probabilité qu'elle ait 3 tickets gagnants ?

c. Quelle est la probabilité que tous les tickets soient perdants ?

Donner une valeur approchée à 0,1 %

Entraînement n° 3

1) La variable aléatoire Z suit une loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,65)$.

Déterminer les valeurs exactes des probabilités : $p(X = 50)$ et $p(X = 96)$

2) On considère dans une population que 85 % des personnes sont porteuses du gène X064. On étudie un échantillon de 50 personnes.

On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de porteurs du gène X064.

a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres

b. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait qu'une seule personne qui ne soit pas porteuse de ce gène ?

Donner une valeur approchée à 0,01 %

Corrections Savoir Pb.3

Corrigé Entraînement n° 1

$$1) p(X = 0) = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{10-0} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

$$p(X = 4) = \binom{10}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 \text{ avec } \binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210 \text{ donc } p(X = 4) = 210 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$p(X = 9) = \binom{10}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^9 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^9$$

2) a. Il s'agit de 35 tirages identiques et indépendants donc chacun a la probabilité de 16 % d'être un succès : la variable G suit une loi **binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,16$**

$$\text{b. on a } p(G = 7) = \binom{35}{7} \times 0,16^7 \times 0,84^{28} \text{ avec } \binom{35}{7} = 6\,724\,520 \text{ donc } p(G = 7) \simeq 0,137$$

La probabilité qu'il y ait exactement 7 gauchers est d'environ 13,7 %

Corrigé Entraînement n° 2

$$1) p(X = 1) = 6 \times 0,05^1 \times 0,95^5 = 0,3 \times 0,95^5$$

$$p(X = 4) = \binom{6}{4} \times 0,05^4 \times 0,95^2 \text{ avec } \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \text{ donc } p(X = 4) = 15 \times 0,05^4 \times 0,95^2$$

$$p(X = 6) = 1 \times 0,05^0 \times 0,95^6 = 0,95^6$$

2) a. Attention, chaque ticket a 80% de chance d'être perdant.

Il s'agit de 12 tirages identiques et indépendants donc chacun a la probabilité de 80 % d'être un succès : la variable P suit une loi **binomiale de paramètres $n = 12$ et $p = 0,8$**

b. 3 tickets gagnants, c'est 9 tickets perdants : donc

$$p(P = 9) = \binom{12}{9} \times 0,8^9 \times 0,2^3 \text{ avec } \binom{12}{9} = \binom{12}{3} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2} = 220 \text{ donc } p(P = 9) \simeq 0,236$$

La probabilité qu'elle ait 3 tickets gagnants est d'environ 23,6 %

$$\text{c. } p(P = 12) = 0,8^{12} \simeq 0,069 \text{ soit environ 6,9 \% de chances que tous les tickets soient perdants}$$

Corrigé Entraînement n° 3

$$1) p(X = 50) = \binom{100}{50} \times 0,65^{50} \times 0,35^{50} \text{ avec } \binom{100}{50} \text{ de l'ordre de } 10^{29} \dots \text{ donc bien trop grand pour être écrit}$$

$$p(X = 96) = \binom{100}{96} \times 0,65^{96} \times 0,35^4 \text{ avec } \binom{100}{96} = \binom{100}{4} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97}{4 \times 3 \times 2} = 3\,921\,225$$

donc $p(X = 96) = 3\,921\,225 \times 0,65^{96} \times 0,35^4$

2) a. Il s'agit de 50 tirages identiques et indépendants donc chacun a la probabilité de 85 % d'être un succès : la variable P suit une loi **binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,85$**

$$\text{b. } P(X = 49) = \binom{50}{49} \times 0,85^{49} \times 0,15 = 50 \times 0,15 \times 0,85^{49} = 7,5 \times 0,85^{49} \simeq 0,0026$$

Il y a 0,26 % de chance qu'il n'y ait qu'une seule personne qui ne soit pas porteuse de ce gène