

Corrigé Sujet n°5 – Amérique du Sud 1 – nov 25

Partie A

1. $\bar{S}$ est l'évènement « Abel ne réussit pas son 1^{er} service »
(ou « Abel rate son 1^{er} service »)

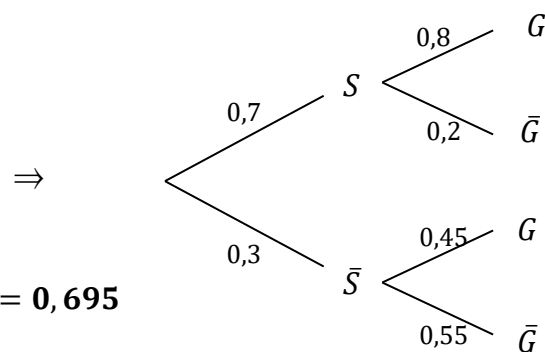
2. $P(S \cap G) = p(S) \times p_S(G) = 0,7 \times 0,8 = \mathbf{0,56}$

3. $P(G) = P(S \cap G) + P(\bar{S} \cap G) = 0,56 + 0,3 \times 0,45 = 0,56 + 0,135 = \mathbf{0,695}$

4. $p_G(S) = \frac{P(S \cap G)}{p(G)} = \frac{0,56}{0,695} \simeq \mathbf{0,805}$

Si Abel a gagné le point, il y a alors environ 80% de chance qu'il ait réussi son premier service

5. Pour rappel, on dit que des évènements A et B sont indépendants ssi $p_A(B) = p(B)$
Par exemple ici, $p_G(S) \neq p(S)$ donc les évènements ne sont pas indépendants



Partie B

1. a. Il s'agit de la répétition de 20 épreuves de Bernoulli identique et indépendantes, chacune ayant une probabilité de succès de 0,85 : X suit une **loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,85$**

b. $P(X \leq 18) \simeq 0,824$.

c. Pour qu'il y ait au moins deux balles qui ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées, il faut qu'il y en ait au plus 18 qui soient conformes. D'après la question précédente, il y a donc **environ 82,4 % de chances qu'il y ait au moins 2 balles non conformes.**

d. $E(X) = np = 20 \times 0,85 = \mathbf{17}$.

2. a. $E(M_n) = E\left(\frac{C_1}{n}\right) + E\left(\frac{C_2}{n}\right) + \dots + E\left(\frac{C_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(C_1) + \frac{1}{n}E(C_2) + \dots + \frac{1}{n}E(C_n) = \frac{0,85}{n} + \frac{0,85}{n} + \dots + \frac{0,85}{n}$
 $= \frac{0,85}{n} \times n = \mathbf{0,85}$

Comme les variables aléatoires C_i sont indépendantes

$$V(M_n) = V\left(\frac{C_1}{n}\right) + V\left(\frac{C_2}{n}\right) + \dots + V\left(\frac{C_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(V(C_1) + V(C_2) + \dots + V(C_n)) = n \times \frac{0,1275}{n^2} = \frac{\mathbf{0,1275}}{n}$$

b. On a $0,85 - 0,75 = 0,1$ et $0,95 - 0,85 = 0,1$

donc l'évènement $(0,75 < M_n < 0,95)$ peut s'écrire $(|M_n - 0,85| < 0,1)$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2}$ pour $\delta = 0,1$

Soit : $P(|M_n - 0,85| \geq 0,1) \leq \frac{\frac{0,1275}{n}}{0,01} \Leftrightarrow : P(|M_n - 0,85| \geq 0,1) \leq \frac{12,75}{n}$

On a alors $P(|M_n - 0,85| < 0,1) = 1 - P(|M_n - 0,85| \geq 0,1)$

Donc $P(|M_n - 0,85| < 0,1) \geq 1 - \frac{12,75}{n}$ **CQFD**

c. on cherche n tel que $1 - \frac{12,75}{n} \geq 0,9 \Leftrightarrow \frac{12,75}{n} \leq 0,1 \Leftrightarrow n \geq \frac{12,75}{0,1} \Leftrightarrow n \geq 127,5$

Il faudrait tester au moins 128 balles