

Corrigé Exercice BAC 1

Partie A

1. Dans une équation différentielle de type $y' = ay + b$, la fonction constante $y = -\frac{b}{a}$ est une solution particulière. L'équation $y' = ay$ a pour solution générale $y = ke^{at}$ et donc l'équation $y' = ay + b$ a pour solution générale $y = ke^{at} - \frac{b}{a}$

On a ici : (E) : $y' + 0,02y = m \Leftrightarrow y' = -0,02y + m$

Avec $a = -0,02$ et $-\frac{b}{a} = -\frac{m}{-0,02} = \frac{1}{0,02}m = 50m$

Les solutions de (E) sont bien de la forme $y = ke^{-0,02t} + 50m$ avec $k \in \mathbb{R}$

2. La fonction f est solution de (E), on a donc une valeur de k pour laquelle $f(t) = ke^{-0,02t} + 50m$

On a alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} ke^{-0,02t} + 50m = 50m$

Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 30$ alors on a $50m = 30 \Leftrightarrow m = \frac{30}{50} = 0,6$ **CQFD**

3. On a $f(0) = ke^0 + 50 \times 0,6 = k + 30 = 210 \Leftrightarrow k = 210 - 30 = 180$

Alors $f(t) = 180e^{-0,02t} + 30$

Partie B

1. a. Graphiquement, on a $f(t) \leq 50$ pour $t \geq 110$: **il faut attendre 110 min avant de démolir l'objet.**

$$b. f(t) \leq 50 \Leftrightarrow 180e^{-0,02t} + 30 \leq 50 \Leftrightarrow 180e^{-0,02t} \leq 20 \Leftrightarrow e^{-0,02t} \leq \frac{20}{180} \Leftrightarrow -0,02t \leq \ln\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0,02t \geq -\ln\left(\frac{1}{9}\right) \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 9}{0,02} \Leftrightarrow t \geq 50 \ln 9 \quad \text{On a exactement } T = 50 \ln 9$$

$$\begin{aligned} 2. t_M &= \frac{1}{100} \int_0^{100} f(t) dt = \frac{1}{100} \int_0^{100} (180e^{-0,02t} + 30) dt = \frac{1}{100} \left[\frac{180}{-0,02} e^{-0,02t} + 30t \right]_0^{100} \\ &= \frac{1}{100} [-9000e^{-0,02t} + 30t]_0^{100} = \frac{1}{100} ((-9000e^{-2} + 3000) - (-9000)) = -90e^{-2} + 30 + 90 \\ &= 120 - 90e^{-2} \simeq 119^\circ\text{C} \end{aligned}$$

La température moyenne lors des 100 premières minutes est d'environ 119°C

Corrigé Exercice BAC 2

$$1. f(x) = 0 \Leftrightarrow a \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$2. F'(x) = a \left(1 \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 \right) = a(\ln(x) + 1 - 1) = a \ln(x) = f(x)$$

Donc F est bien une primitive de f

$$3. \mathcal{A} = \int_1^{x_0} f(x) dx = F(x_0) - F(1) = a[x_0 \ln(x_0) - x_0] - a[1 \ln(1) - 1] = a(x_0 \ln(x_0) - x_0 + 1)$$

$$4. \text{On a } f'(x) = \frac{a}{x} \text{ donc } f'(x_0) = \frac{a}{x_0} \text{ et } f(x_0) = a \ln x_0$$

$$\text{L'équation de la tangente } \mathcal{T} \text{ est } y = \frac{a}{x_0}(x - x_0) + a \ln x_0$$

$$\text{On a alors } y_A = \frac{a}{x_0}(0 - x_0) + a \ln x_0 = -a + a \ln x_0$$

$$\text{On a } A(0; -a + a \ln x_0) \text{ et } B(0; a \ln x_0)$$

$$\text{Alors } AB = |y_B - y_A| = |a \ln x_0 - (-a + a \ln x_0)| = |a| = a \text{ car } a \text{ est un réel strictement positif.}$$

Donc AB est bien une constante indépendante de x_0