

Corrigé Exercice 4

1) Init. : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = -1 \leq 1$ La propriété $u_n \leq 1$ est vraie au rang 0.

Héréd. : Si la propriété $u_n \leq 1$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $u_p \leq 1$

Alors pour $n = p + 1$, on a : $u_n = u_{p+1} = 0,2u_p + 0,6$.

Or $u_p \leq 1 \Rightarrow 0,2u_p \leq 0,2 \Rightarrow 0,2u_p + 0,6 \leq 0,8 \Rightarrow u_{p+1} \leq 0,8 \leq 1$. La propriété est vraie au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 0$, on a bien $u_n \leq 1$

2) Init. : Pour $n = 1$, on a $v_n = v_1 = 5 \geq 4$ La propriété $v_n \geq 4$ est vraie au rang 1.

Héréd. : Si la propriété $v_n \geq 4$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $v_p \geq 4$

Alors pour $n = p + 1$, on a : $v_n = v_{p+1} = \sqrt{5v_p - 4}$

Or : $v_p \geq 4 \Rightarrow 5v_p \geq 20 \Rightarrow 5v_p - 4 \geq 16 \Rightarrow \sqrt{5v_p - 4} \geq 4 \Rightarrow v_{p+1} \geq 4$.

La propriété est vraie au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on a bien $v_n \geq 4$

3) a. D'après les résultats ci-contre (qu'on peut obtenir à la calculatrice en rentrant la suite (w_n) et la suite (2^n)), on semble avoir $w_n \geq 2^n$ à partir du rang $n_0 = 4$.

n	Wn	2^n
0	0	1
1	1	2
2	2	4
3	5	8
4	26	16
5	677	32
6	458330	64

b. On a : $(2^p - 1)^2 = (2^p)^2 - 2 \times 2^p + 1 = 2^{2p} - 2^{p+1} + 1$

Or un carré est toujours positif, donc $(2^p - 1)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow 2^{2p} - 2^{p+1} + 1 \geq 0 \Rightarrow 2^{2p} + 1 \geq 2^{p+1} \quad \text{CQFD}$$

c. Init. : Pour $n = 4$, on a $w_n = w_4 = 26$ et $2^n = 2^4 = 16$

La propriété $w_n \geq 2^n$ est vraie au rang 4.

Héréd. : Si la propriété $w_n \geq 2^n$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $w_p \geq 2^p$.

Alors pour $n = p + 1$, on a :

$$w_p \geq 2^p \Rightarrow w_p^2 \geq 2^{2p} \Rightarrow w_p^2 + 1 \geq 2^{2p} + 1 \Rightarrow w_{p+1} \geq 2^{2p} + 1$$

Or, pour $p \geq 4$, on a $2p = p + p \geq p + 4$ et par élargissement $2p \geq p + 1$

Donc, en passant à la puissance $2^{2p} + 1 \geq 2^{p+1} + 1 \geq 2^{p+1}$ par élargissement

On a donc bien $w_{p+1} \geq 2^{p+1}$ La propriété est alors vérifiée au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 4$, on a bien $w_n \geq 2^n$

Pour aller plus loin...

1) Init. : Pour $n = 1$, on a $u_n = u_1 = 2 \leq 10$ La propriété est vraie au rang 1.

Héréd. : Si la propriété $u_n \leq 10$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $u_p \leq 10$.

Alors pour $n = p + 1$, on a :

$$\text{Or } u_p \leq 10 \Rightarrow \frac{3}{10}u_p \leq 3 \Rightarrow \frac{3}{10}u_p + 7 \leq 10 \Rightarrow u_{p+1} \leq 10 \quad \text{La propriété est alors vérifiée au rang } p + 1.$$

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on a bien $u_n \leq 10$

2) Init. : Pour $n = 0$, on a $v_n = v_0 = 2$ donc $0 < v_n \leq 9$ La propriété est vraie au rang 0.

Héréd. : Si la propriété $0 < v_n \leq 9$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $0 < v_p \leq 9$.

Alors pour $n = p + 1$, on a : $v_n = v_{p+1} = \sqrt{9v_p}$

Or : $0 < v_p \leq 9 \Rightarrow 0 < 9v_p \leq 81 \Rightarrow 0 < \sqrt{9v_p} \leq \sqrt{81} \Rightarrow 0 < v_{p+1} \leq 9$

La propriété $0 < v_n \leq 9$ est alors vérifiée au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 0$, on a bien $0 < v_n \leq 9$

3) Init. : Pour $n = 0$, on a $w_n = w_0 = 2$ donc $\frac{3}{2} \leq w_n \leq 2$ La propriété est vraie au rang 0.

Héréd. : Si la propriété $\frac{3}{2} \leq w_n \leq 2$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $\frac{3}{2} \leq w_p \leq 2$.

Alors pour $n = p + 1$, on a : $w_n = w_{p+1} = \frac{1}{w_p} + 1$.

Or $\frac{3}{2} \leq w_p \leq 2 \Rightarrow \frac{2}{3} \geq \frac{1}{w_p} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{w_p} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \frac{1}{w_p} + 1 \leq \frac{5}{3} < 2 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq w_{p+1} < 2$

La propriété $\frac{3}{2} \leq w_n < 2$ est alors vérifiée au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 0$, on a bien $\frac{3}{2} \leq w_n \leq 2$

Corrigé Exercice 5

1) a. $f'(x) = \frac{2(x+6)-1(2x+5)}{(x+6)^2} = \frac{2x+12-2x-5}{(x+6)^2} = \frac{7}{(x+6)^2} > 0$

La dérivée est strictement positive, donc la fonction f est strictement croissante.

b. Init. : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = -1 \leq 1$ donc la propriété $u_n \leq 1$ est vraie au rang 0.

Héréd. : Si la propriété $u_n \leq 1$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $u_p \leq 1$.

Alors pour $n = p + 1$, on a : $u_n = u_{p+1} = f(u_p)$

Comme la fonction f est croissante, on a : $u_p \leq 1 \Rightarrow f(u_p) \leq f(1)$ avec $f(1) = \frac{7}{7} = 1$.

Alors $u_{p+1} \leq 1$. La propriété $u_n \leq 1$ est alors vérifiée au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 0$, on a bien $u_n \leq 1$

2) a. $g'(x) = -\frac{2}{8}x$ on a le tableau de signe ci-contre :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$

b. Init. : Pour $n = 0$, on a $v_0 = 0$ donc

la propriété $0 \leq v_n \leq 2$ est vraie au rang 0.

Héréd. : Si la propriété $0 \leq v_n \leq 2$ est vraie pour $n = p$, alors on a :

$0 \leq v_p \leq 2$.

Alors pour $n = p + 1$, on a : $v_n = v_{p+1} = g(v_p)$.

Or la fonction g est décroissante sur $[0; +\infty[$, donc : $0 \leq v_p \leq 2 \Rightarrow g(0) \geq g(v_p) \geq g(2)$

Avec $g(0) = 2$ et $g(2) = -\frac{1}{8} \times 4 + 2 = \frac{3}{2}$ donc : $2 \geq v_{p+1} \geq \frac{3}{2} \geq 0$ donc par élargissement $0 \leq v_{p+1} \leq 2$.

La propriété $0 \leq v_n \leq 2$ est vérifiée au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 0$, on a bien $0 \leq v_n \leq 2$

3) a. $\phi'(x) = -e^{x-1}$ est donc strictement négative donc ϕ est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

b. Init. : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = 1$ donc la propriété $0 \leq u_n \leq 1$ est vraie au rang 0.

Héréd. : Si la propriété $0 \leq u_n \leq 1$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $0 \leq u_p \leq 1$.

Alors pour $n = p + 1$, on a : $u_n = u_{p+1} = \phi(u_p)$.

Or la fonction ϕ est décroissante sur $[0; +\infty[$, donc : $0 \leq u_p \leq 1 \Rightarrow \phi(0) \geq \phi(u_p) \geq \phi(1)$

Avec $\phi(0) = 1 - e^{-1}$ et $\phi(1) = 1 - e^0 = 0$ donc : $1 - \frac{1}{e} \geq u_{p+1} \geq 0$. Or $1 - \frac{1}{e} \leq 1$.

Alors par élargissement $0 \leq u_{p+1} \leq 1$. La propriété est vérifiée au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 0$, on a bien $0 \leq u_n \leq 1$

Pour aller plus loin...

4) a. $f'(x) = \frac{2x-(2x+1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2} < 0$ la dérivée est strictement négative, donc f est strictement décroissante

b. Init. : Pour $n = 0$, on a $w_n = w_0 = 3$ donc la propriété $2 \leq w_n \leq 3$ est vraie au rang 0.

Héréd. : Si la propriété $2 \leq w_n \leq 3$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $2 \leq w_p \leq 3$.

Alors pour $n = p + 1$, on a : $w_n = w_{p+1} = f(w_p)$.

Or la fonction f est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc $2 \leq w_p \leq 3 \Rightarrow f(2) \geq f(w_p) \geq f(3)$

Avec $f(2) = \frac{5}{2}$ et $f(3) = \frac{7}{3}$

Alors : $\frac{5}{2} \geq w_{p+1} \geq \frac{7}{3}$. Or $\frac{5}{2} \leq 3$ et $\frac{7}{3} \geq 2$ alors par élargissement : $3 \geq w_{p+1} \geq 2$.

La propriété $2 \leq w_n \leq 3$ est vérifiée au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 0$, on a bien $2 \leq w_n \leq 3$

5) a. $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ donc pour $x \geq 0$, la dérivée f' est strictement positive, et f est strictement croissante.

b. Init. : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = 1$ donc la propriété $0 \leq u_n \leq 1$ est vraie au rang 0.

Héréd. : Si la propriété $0 \leq u_n \leq 1$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $0 \leq u_p \leq 1$.

Alors pour $n = p + 1$, on a : $u_n = u_{p+1} = f(u_p)$.

Or la fonction f est croissante : $0 \leq u_p \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(u_p) \leq f(1)$

Avec $f(0) = \ln(1) = 0$ et $f(1) = \ln 2 \leq 1$. On a alors $0 \leq u_{p+1} \leq \ln 2$ avec $\ln 2 \leq 1$

D'où par élargissement : $0 \leq u_{p+1} \leq 1$

La propriété $0 \leq u_n \leq 1$ est vérifiée au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 0$, on a bien $0 \leq u_n \leq 1$

Corrigé Exercice 6

1) Raisonnement par récurrence :

Init. : Pour $n = 0$, on a $u_n = u_0 = 1$ et $n^2 = 0^2 = 0$ La propriété $u_n > n^2$ est vraie au rang 0.

Héréd. : Si la propriété $u_n > n^2$ est vraie pour $n = p$, alors on a : $u_p > p^2$.

Alors pour $n = p + 1$, on a :

D'une part

$$u_n = u_{p+1} = u_p + 2p + 3$$

$$\text{Et } u_p > p^2 \Rightarrow u_p + 2p + 3 > p^2 + 2p + 3$$

$$\text{Et par élargissement } \Rightarrow u_{p+1} > p^2 + 2p + 1$$

D'autre part

$$n^2 = (p+1)^2 = p^2 + 2p + 1$$

Ainsi on a : $u_{p+1} > (p+1)^2$ La propriété est vérifiée au rang $p + 1$.

Ccl : Pour tout nombre entier $n \geq 0$, on a bien $u_n > n^2$

2) Attention ne pas aller trop vite à la récurrence !

Démonstration directe : on a, pour tout entier n : $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $3 \geq -3 \sin n \geq -3$

$$\text{Et } n^2 + 3 \geq n^2 - 3 \sin n \geq n^2 - 3 \Rightarrow \text{On a bien } \mathbf{a_n \geq n^2 - 3}$$

3) Démonstration directe

On sait que, pour $\underline{x > 0}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

En particulier, $(1 + x)^4 \geq 1 + 4x$.

On a donc, pour $\mathbf{n > 0}$, c'est-à-dire pour $\mathbf{n \geq 1}$ l'inégalité $(1 + n)^4 \geq 1 + 4n$.

Reste à la vérifier pour $n = 0$: $p_0 = (1 + 0)^4 = 1$ et $1 + 4 \times 0 = 1$ on a bien $p_0 \geq 1$ l'inégalité est vraie aussi pour $n = 0$.

4) Démonstration directe

Pour $n \geq 0$ on a $n + 1 \geq 1$ et $\frac{1}{n+1} \leq 1$ et donc $\frac{2}{n+1} \leq 2$ et par passage à la puissance $\left(\frac{2}{n+1}\right)^n \leq 2^n$