

Savoir Sv.1 – Sommes de variables aléatoires

Exercice 1: Loi binomiale et changement de variable

On arrondira les probabilités à 10^{-2}

1. On appelle X le nombre de points obtenus lors de 50 parties successives jouées à un jeu de hasard. On considère que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,2$. Chaque point obtenu rapporte 0,20 €. La somme d'argent obtenue est alors notée $A = 0,2X$. Calculer la probabilité que la somme d'argent gagnée au total soit comprise entre 3 et 4 €.
2. On appelle D la durée de vie, en heures, d'une batterie rechargeable. On considère que D suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,9$.
 - a. Suite à une mise à jour, la durée de vie des batteries a été augmentée de 10 heures. Leur durée de vie est alors notée $Y = D + 10$. On choisit une batterie au hasard. Calculer la probabilité que sa durée de vie soit supérieure à 100 heures.
 - b. La mise à jour précédente est effacée et remplacée par une autre mise à jour augmentant la durée de vie de 25%. La durée de vie est alors notée $Z = 1,25D$. On choisit une batterie au hasard. Calculer la probabilité que sa durée de vie soit supérieure à 100 heures. (arrondir ici au millième)

Exercice 2: Indépendance

1. Pour quel couple de variables peut-on admettre qu'elles sont indépendantes ?
 - P : l'âge d'un professeur du lycée choisi aléatoirement et E : l'âge d'un élève du lycée choisi aléatoirement.
 - S : Le nombre d'heures de sommeil d'un jour donné d'une personne choisie aléatoirement et V : Le nombre d'heures d'éveil du même jour de cette personne.
 - R : Le revenu annuel d'une personne choisie aléatoirement et D : La dépense annuelle en vêtements de cette personne.
2. Environ 1,7 millions d'élèves américains ont passé le SAT en 2015. Chaque élève a obtenu une note en lecture et une note en mathématiques. On donne les statistiques du test SAT en 2015 :

Matière	Moyenne	Écart-type
Lecture	$\mu_L = 495$	$\sigma_L = 116$
Mathématiques	$\mu_M = 511$	$\sigma_M = 120$
Total	μ_T	σ_T

- a. On assimile les moyennes à l'espérance des variables aléatoires correspondantes. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T égale à la somme des notes obtenues par un élève en lecture et en mathématiques ?
- b. Quel est l'écart-type de la variable aléatoire T ?

3. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes d'espérances respectives 4 et 7 et d'écart-types respectifs 3 et 4.
 - a. Déterminer $E(X + Y)$; $V(X + Y)$ et $\sigma(X + Y)$.
 - b. On définit $Z = 2X - Y$. Calculer l'espérance et l'écart-type de Z
 - c. De même pour $K = 1 - 3X$.

Exercice 3: Conformité

La conformité d'un produit est réalisée par 4 contrôleurs qualités successivement. L'espérance du temps nécessaire à chaque contrôleur pour inspecter le produit est de 30 secondes et l'écart-type de ce temps est de 6 secondes.

De plus, le temps nécessaire à un contrôleur pour inspecter le produit ne dépend pas du temps nécessaire à un autre contrôleur pour inspecter le produit.

On désigne par T le temps nécessaire aux 4 contrôleurs pour inspecter un produit choisi aléatoirement.

1. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?
2. Quels sont la variance et l'écart-type de la variable aléatoire T ?

Exercice 4: Une différence de taille

Un sociologue a mené une enquête auprès d'un échantillon aléatoire de militaires dans un pays afin d'étudier la différence de taille entre les hommes et les femmes. Il a obtenu les résultats suivants :

Dans cet échantillon, on choisit aléatoirement un homme et une femme et on étudie la différence entre leurs tailles.

On note H la variable aléatoire égale à la taille de l'homme et F la variable aléatoire égale à la taille de la femme. D est la variable aléatoire "différence de taille" : $D = H - F$.

	Moyenne	Écart-type
Homme	$\mu_H = 178 \text{ cm}$	$\sigma_H = 7 \text{ cm}$
Femme	$\mu_F = 164 \text{ cm}$	$\sigma_F = 6 \text{ cm}$
Différence	μ_D	σ_D

1. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire D ?
2. Quels sont la variance et l'écart-type de la variable aléatoire D ? Arrondir au dixième.

Exercice 5: Les bonbons

Dans une usine, chaque paquet de bonbons est composé de 4 sachets. La masse de bonbons d'un sachet n dans un paquet peut être modélisée par une variable aléatoire B_n , chacune de moyenne 50 g et d'écart-type 5 g. On suppose que les masses de bonbons de chaque sachet sont indépendantes les unes des autres.

On désigne par T la variable aléatoire égale à la masse totale de bonbons dans un paquet choisi au hasard.

1. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire T ?
2. Quels sont la variance et l'écart-type de la variable aléatoire T ?
3. On désigne maintenant par M la variable aléatoire égale à la masse moyenne de chaque sachet contenu dans un paquet.
Calculer $E(M)$, $V(M)$ et $\sigma(M)$.