

Corrigé métropole 1 (secours) – Juin 2024

Corrigé Exercice 1

1. $C(4; 4; 0)$, $F(4; 0; 4)$, $G(4; 4; 4)$ et $H(0; 4; 4)$.

2. On a $I(2; 0; 4) \in (IC)$ et $\overrightarrow{IC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, vecteur directeur de (IC) : la droite a donc bien pour

représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

3. a. $\frac{1}{2}\overrightarrow{IC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, qui a alors une équation du type $x + 2y - 2z + d = 0$

Comme $G \in \mathcal{P}$ on a : $x_G + 2y_G - 2z_G + d = 0 \Leftrightarrow 4 + 8 - 8 + d = 0 \Leftrightarrow d = -4$

$\mathcal{P}$ a bien comme équation cartésienne : $x + 2y - 2z - 4 = 0$

b. J est solution du système $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \\ z = 4 - 4t \\ x + 2y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ donc $(2 + 2t) + 2 \times 4t - 2(4 - 4t) - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2 + 2t + 8t - 8 + 8t - 4 = 0 \Leftrightarrow 18t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{9}$$
$$\text{On a alors pour les coordonnées de } J : \begin{cases} x = 2 + 2 \times \frac{5}{9} = \frac{18+10}{9} = \frac{28}{9} \\ y = 4 \times \frac{5}{9} = \frac{20}{9} \\ z = 4 - 4 \times \frac{5}{9} = \frac{36-20}{9} = \frac{16}{9} \end{cases} \text{ donc } J \left(\frac{28}{9}; \frac{20}{9}; \frac{16}{9} \right).$$

Comme $(IC) \cap \mathcal{P} = \{I\}$ et que $(IC) \perp \mathcal{P}$, le point J est le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$

c. On teste : $x_K + 2y_K - 2z_K - 4 = 0 + 4 - 0 - 4 = 0 \Rightarrow$ le point $K(0; 2; 0)$ appartient bien à $\mathcal{P}$.

d. Le point G appartient au plan $\mathcal{P}$ mais pas au plan (ABC) donc les plans sont distincts

K est le milieu de $[AD]$ donc $K \in (ABC)$: K est un point commun aux deux plans, ils ne sont pas parallèles.

Par ailleurs, $x_B + 2y_B - 2z_B - 4 = 4 + 0 - 0 - 4 = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{P}$ de même que $B \in (ABC)$.

Donc $(BK) \subset (ABC)$ et $(BK) \subset \mathcal{P}$

La droite (BK) est bien la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (ABC)

4. a. Dans la pyramide $(CBKG)$ on prend comme base CBG , avec $\mathcal{A}_{CBG} = \frac{CB \times CG}{2} = 8$

La hauteur issue de K est de 4. Alors $\mathcal{V}_{CBKG} = \frac{1}{3} \times 8 \times 4 = \frac{32}{3}$.

b. On peut aussi, pour la pyramide $(CBKG)$, prendre comme base BKG et comme hauteur CJ puisque J est le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$ et que $\mathcal{P} = (BKG)$, les 3 points en faisant partie.

$$\text{On a } CJ = \sqrt{\left(\frac{28}{9} - 4\right)^2 + \left(\frac{20}{9} - 4\right)^2 + \left(\frac{16}{9} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{256}{81} + \frac{256}{81}} = \sqrt{\frac{576}{81}} = \frac{24}{9}$$

Alors $\mathcal{V}_{CBKG} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{BKG} \times \frac{24}{9} \Leftrightarrow \frac{24}{3 \times 9} \mathcal{A}_{BKG} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \mathcal{A}_{BKG} = \frac{32 \times 9}{24} = 12$ CQFD

c. On rappelle que $B \in \mathcal{P}$ et $G \in \mathcal{P}$ donc $(BG) \subset \mathcal{P}$

d. On pose $I'(k; 0; 4)$ avec $k \in [0; 4]$ alors $\overrightarrow{I'C} \begin{pmatrix} 4-k \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ est le vecteur normal de $\mathcal{P}'$ qui a alors une équation du type $(4-k)x + 4y - 4z + d' = 0$

Comme $G \in \mathcal{P}'$ on a : $(4-k)x_G + 4y_G - 4z_G + d' = 0 \Leftrightarrow 4(4-k) + 16 - 16 + d' = 0$
 $\Leftrightarrow d' = -4(4-k)$ alors $\mathcal{P}'$ a comme équation cartésienne : $(4-k)x + 4y - 4z - 4(4-k) = 0$

On teste le point B : $(4-k)x_B + 4y_B - 4z_B - 4(4-k) = (4-k)4 + 0 - 0 - 4(4-k) = 0$

Pour toute valeur de $k \in [0; 4]$ on a $B \in \mathcal{P}'$

Par conséquent, $(BG) \subset \mathcal{P}'$

(Remarque : une autre méthode possible est de calculer $\overrightarrow{I'C} \cdot \overrightarrow{BG}$, de montrer que c'est égal à zéro, que (BG) est orthogonale à $(I'C)$ donc parallèle au plan $\mathcal{P}'$ et comme $G \in \mathcal{P}'$, elle est incluse... C'est plus rapide, mais il faut y penser ;-)

Corrigé Exercice 2

Partie A

1. Il s'agit de la répétition de 10 épreuves de Bernoulli, toutes identiques et indépendantes, dont la probabilité de succès est de 0,25 : X suit donc une **loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,25$**

2. $p(X \geq 4) = 1 - p(X \leq 3) \simeq 0,224$

Il y a environ 22 % de chances qu'au moins 4 clients passent moins de 12 minutes à la station.

3. $E(X) = np = 10 \times 0,25 = 2,5$: sur un grand nombre d'échantillons de 10 personnes, on peut espérer en moyenne 2,5 clients par échantillon qui passent moins de 12 minutes dans la station.

Partie B

1. $S = T_1 + T_2 + T_3$.

2. a. Déterminer l'espérance de $E(S) = E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) = 3 \times 6 = 18$

En moyenne, le temps d'attente total du 3^{ème} client est de 18 minutes

b. Les évènements sont considérés indépendants, alors $V(S) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3) = 3 \times 1 = 3$

3. L'évènement $(14 < S < 22)$ correspond à l'évènement $(|S - 18| < 4)$

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $p(|S - E| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$ pour $\delta = 4$

On a alors $p(|S - 18| \geq 4) \leq \frac{3}{16}$

Mais les évènements $(|S - 18| < 4)$ et $(|S - 18| \geq 4)$ sont des évènements contraires, donc

$p(|S - 18| < 4) = 1 - p(|S - 18| \geq 4)$ donc $p(|S - 18| < 4) \geq 1 - \frac{3}{16} \Leftrightarrow p(|S - 18| < 4) \geq \frac{13}{16}$

Comme $\frac{13}{16} = 0,8125$, on peut donc bien affirmer que **la probabilité est supérieure ou égale à 0,81**

Corrigé Exercice 3

Partie A

1. a. $f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2x}{x^2+1}$ et comme $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$ on a bien $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$

b.

Donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	0	+
x^2+1	+		+
$f'(x)$	+	0	+

2. $x - 2 \ln(x) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x - \ln(x^2) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = x - \ln\left(x^2 \times \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right)$
 $= x - \ln\left(x^2 + \frac{x^2}{x^2}\right) = x - \ln(x^2 + 1) = f(x)$ **CQFD**

3. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ donc, par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$

Pa ailleurs $x - 2 \ln(x) = x \left(1 - \frac{2 \ln x}{x}\right)$

D'après les limites comparées, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2 \ln x}{x} = 1$

Et par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{2 \ln x}{x}\right) = +\infty$

Comme $f(x) = x \left(1 - \frac{2 \ln x}{x}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ on a donc par somme de limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Partie B

1. Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = 7 \geq 0$ donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$

Hérédité : On suppose que pour $p \in \mathbb{N}$, on a $u_p \geq 0$

Alors comme la fonction f est croissante, on a $f(u_p) \geq f(0)$

On a $f(u_p) = u_{p+1}$ et $f(0) = 0 - \ln(0^2 + 1) = -\ln 1 = 0$ donc $u_{p+1} \geq 0$

L'inégalité est alors vraie pour $n = p + 1$

Conclusion : pour tout entier naturel n , on a bien $u_n \geq 0$

2. On a $u_{n+1} - u_n = -\ln(u_n^2 + 1)$

Or $u_n \geq 0 \Rightarrow u_n^2 \geq 0 \Rightarrow u_n^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow \ln(u_n^2 + 1) \geq \ln 1$ car la fonction $\ln$ est croissante

Et donc $-\ln(u_n^2 + 1) \leq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$

La suite (u_n) est bien décroissante.

(Remarque : vous pouvez tout-à-fait faire une 2^{ème} récurrence, ça marche, même si ce n'est pas ce vers quoi le sujet vous guide)

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par zéro : d'après le théorème des suites monotones bornées, elle est donc **convergente**.

4. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ On a alors, par composée de limite :

$$\ell = \ell - \ln(\ell^2 + 1) \Leftrightarrow \ln(\ell^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow \ell^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

5. a. While $u > h$

$n = n + 1$

$u = u - \ln(u^2 + 1)$

b. On cherche la valeur de n à partir de laquelle $u_n \leq 0,01$: à la

calculatrice, on a $u_{96} \simeq 0,01003$ et $u_{97} \simeq 0,0099$. Donc l'algorithme renvoie la **valeur 97**

Partie C

1. On a :

Donc $f(x) \geq 0$ pour $x \in [0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$

2. L'aire comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 4$

3. $0,5x - 1 \leq f(x) \leq 0,25x + 0,25$ donc : $\int_2^4 (0,5x - 1) dx \leq \int_2^4 f(x) dx \leq \int_2^4 (0,25x + 0,25) dx$

On a $\int_2^4 (0,5x - 1) dx = [0,25x^2 - x]_2^4 = 0,25 \times 16 - 4 - (0,25 \times 4 - 2) = -(-1) = 1$

et $\int_2^4 (0,25x + 0,25) dx = [0,125x^2 + 0,25x]_2^4 = 0,125 \times 16 + 0,25 \times 4 - (0,125 \times 4 + 0,25 \times 2)$
 $= 2 + 1 - (0,5 + 0,5) = 2$

On a bien l'encadrement : $1 \leq I \leq 2$.

Corrigé Exercice 4

1. a. Affirmation 1 : FAUSSE

C'est la droite d'équation $x = -2$ est asymptote **verticale** à la courbe C_f

Et les droites $y = 5$ et $y = 1$ sont asymptotes horizontales en $-\infty$ et en $+\infty$ à la courbe C_f

b. Affirmation 2 : FAUSSE

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ mais avec $f(x) \leq 5$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 5 = 0^-$

donc, par inverse de limites, on a plutôt $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)-5} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{f(x)-5} = -\infty$

2. a. Affirmation 3 : VRAIE

$g'(x) = 1e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$ et $g''(x) = (-1)e^{-x} + (1-x)(-e^{-x}) = (x-2)e^{-x}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+

Donc le point d'abscisse $x = 2$ est le seul point d'inflexion de la courbe et $g(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$

b. Affirmation 4 : VRAIE

On cherche $g(x) \leq x \Leftrightarrow g(x) - x \leq 0$

$\Leftrightarrow xe^{-x} - x \leq 0 \Leftrightarrow x(e^{-x} - 1) \leq 0$

Avec $e^{-x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

On a bien $g(x) \leq x$

x	$-\infty$	0	2
x	-	0	+
$e^{-x} - 1$	+	0	-
$g(x) - x$	-	0	-

3. Affirmation 5 : VRAIE

Soit $h(x) = x \ln x$ définie sur $]0; +\infty[$.

On a $h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$ donc $\ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$

Donc, avec $h(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$ mais aussi $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur les intervalles $]0; \frac{1}{e}]$ et $[\frac{1}{e}; +\infty[$ sur lesquels la fonction h est continue, monotone (décroissante et croissante) et où 1 est une valeur intermédiaire : l'équation $h(x) = 1$ a une unique solution sur chaque intervalle, soit exactement 2 sur $]0; +\infty[$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	0	$\searrow -\frac{1}{e}$	$\nearrow +\infty$