

Savoirs Fle. 5 : Inéquations et tableaux de signes

Exercice 18 : Inéquations

1) Attention : signe du logarithme

Donner pour le signe des nombres suivants :

a) $\ln(1,02)$ b) $\ln(0,98)$ c) $\ln\left(\frac{5}{8}\right)$ d) $\ln\left(\frac{0,1}{0,03}\right)$ e) $-3 \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

2) Inéquations avec e^x et $\ln x$

Résoudre les inéquations suivantes sur le domaine de définition donné :

a) pour $x > 0$, $\ln x > -3$ b) pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x \leq 7$
 c) pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 3 \leq 0$ d) pour $x \in \mathbb{R}$, $2e^x - 1 \geq 2$
 e) pour $x > 0$, $1 + 3 \ln x > -2$ f) pour $x > 0$, $-3 \ln x - 2 \geq 0$

3) Inéquations avec e^u et $\ln u$

Résoudre les inéquations suivantes sur le domaine de définition donné :

a) pour $x \in]-\infty; 4[$, $\ln(4 - x) \geq 2$ b) pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{x+3} \leq 5$
 c) pour $x > -4$, $\ln\left(\frac{1}{2}x + 2\right) < -1$ d) pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{5-x} - 2 \leq 0$
 e) pour $x > -2$, $\ln(x + 2) + 3 \geq 0$ f) pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x^2} \leq \frac{1}{2}$

4) Entre exponentielles ou entre logarithmes

Résoudre les inéquations suivantes sur le domaine de définition donné :

a) $e^{-3x} > e$ b) $e^{2x} \geq e^{x+4}$ c) $\frac{1}{e^{x^2}} \geq e^{5x}$
 d) pour $x \in]0; 1[$, $\ln(-x + 1) \geq \ln x$ e) pour $x > 1$, $\ln\left(\frac{3x-1}{x+2}\right) \geq 0$

Un peu plus...

1) f) $\ln\left(5 - \frac{16}{7}\right)$ g) $-2 \ln\left(\frac{9}{4} - 1\right)$

2) g) pour $x > 0$, $\ln x + 1 \leq 6$
 h) pour $x > 0$, $\ln x \leq 1$
 i) pour $x \in \mathbb{R}$, $\frac{2}{3} - e^x \geq 0$

3) g) pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{3x-1} > 12$
 h) pour $x > 0$, $\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) > 2$

4) f) $\frac{1}{e^{x-1}} < e^{2x+3}$
 g) $e^2 - e^{x^2-x} \leq 0$
 h) pour $x > 3$, $\ln(3 - 2x) < \ln(x - 3)$
 i) pour $x > 0$, $\ln(x^2 + x) \leq \ln 6$

Exercice 19 : Résolutions pour les suites géométriques

1) Résoudre dans $\mathbb{N}$ les inéquations suivantes :

a) $4^n \geq 204$ b) $(0,7)^n \leq 10^{-2}$ c) $196 - 6 \times 5^n \leq 100$

2) a. On donne la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_n = 1000 - 5 \times 2^n$. À partir de quel rang devient-elle négative ?

b. On donne $b_n = 30 + 2 \times 4^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. Pour quelles valeurs de n a-t-on $b_n > 30\,000$?

3) La suite (S_n) est une suite géométrique de raison 3 et de 1^{er} terme $S_0 = 2$. À partir de quel rang a-t-on $S_n \geq 12\,680$?

Un peu plus...

1) Résoudre dans $\mathbb{N}$:
 $-5 \times 2^n \leq -105$

2) On donne pour $n \in \mathbb{N}$ la suite $u_n = 10 \times 0,9^n + 250$. À partir de quel rang a-t-on $u_n < 252$?

3) La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de 1^{er} terme $u_1 = 100$. À partir de quel rang a-t-on $u_n \leq 1$?

Exercice 20: Tableaux de signes

1) Dresser le tableau de signes des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

$D_f =]0; +\infty[$ $f(x) = 2 \ln x + 4$	$D_h = \mathbb{R}$ $h(x) = 2 - e^{-x}$	$D_i = \mathbb{R}$ $i(x) = e^x - 3$	$D_j =]0; +\infty[$ $j(x) = 5 \ln x - 20$
$D_k =]2; +\infty[$ $k(x) = \ln(x - 2)$	$D_l =]-\infty; \frac{1}{2}[$ $l(x) = \ln(1 - 2x) - 2$	$D_m = \mathbb{R}$ $m(x) = -2e^{3x-6}$	$D_n =]-3; +\infty[$ $n(x) = \ln(x + 3) - 2$

2) Dresser le tableau de signes des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

$D_f =]1; +\infty[$ $f(x) = x \ln(x - 1)$	$D_h =]0; +\infty[$ $h(x) = \ln x (1 - \ln x)$	$D_i =]0; +\infty[$ $i(x) = 5x - x \ln x$
$D_j =]\ln 2; +\infty[$ $j(x) = \ln(e^x - 2)$	$D_k =]0; e^3[\cup]e^3; +\infty[$ $k(x) = \frac{\ln x - 1}{3 - \ln x}$	$D_l =]-\infty; 0[$ $l(x) = \frac{\ln(-x)}{2x - 1}$

Exercice 21: Étude de fonction 1

On définit la fonction g par l'expression : $g(x) = 3x \ln x - 9x + 10$

- Donner l'ensemble de définition de la fonction g .
- Montrer que l'expression de sa dérivée est : $g'(x) = 3 \ln x - 6$.
- Dresser le tableau de variation de g sur l'intervalle $[1; 20]$.
- Combien l'équation $g(x) = 0$ a-t-elle de solution sur l'intervalle $[1; 20]$?
Donner leur valeur approchée au 10^e près.

Exercice 22: Famille de courbes

Pour tout réel positif k , on considère les fonctions f_k et g_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = e^{kx} \quad \text{et} \quad g_k(x) = e^{-kx}$$

On note $\mathcal{C}_k$ et Γ_k les courbes représentant f_k et g_k respectivement dans un repère du plan.

- Sur votre calculatrice, tracer quelques courbes $\mathcal{C}_k$ et Γ_k
- Étudier le sens de variation f_k et g_k
- Étudier la position relative de $\mathcal{C}_k$ et Γ_k (on rappelle que $k \geq 0$)
- Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_m$ pour $0 \leq k < m$
- Étudier celle de Γ_k et Γ_m pour $0 \leq k < m$

Exercice 23: Familles de courbes (bis)

Pour tout réel positif k , on considère les fonctions h_k et i_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_k(x) = e^{kx^2} \quad \text{et} \quad i_k(x) = e^{-kx^2}$$

On note $\mathcal{C}_k$ et Γ_k les courbes représentant h_k et i_k respectivement dans un repère du plan.

- Sur votre calculatrice, tracer quelques courbes $\mathcal{C}_k$ et Γ_k
- Étudier le sens de variation h_k et i_k
- Étudier la position relative de $\mathcal{C}_k$ et Γ_k (on rappelle que $k \geq 0$)
- Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_k$ et de $\mathcal{C}_m$ pour $0 \leq k < m$
- Étudier celle de Γ_k et de Γ_m pour $0 \leq k < m$