

Les nombres entiers particuliers

Selon la somme de leurs diviseurs :

Nombre N , ensemble des diviseurs propres (tous ses diviseurs, sauf lui-même)
et somme de ses diviseurs S

Nom	Définitions	Exemples	Quelques propriétés
Nombres déficients	La somme de ses diviseurs propres est inférieure au nombre : $S < N$	$N = 10$	Toutes les puissances de nombres 1^{er} sont déficients Tous les diviseurs d'un nombre déficients sont déficients
Nombres parfaits	La somme de ses diviseurs propres est égale au nombre : $S = N$	$N = 28$	On ne sait toujours pas s'il existe des nombres parfaits impairs Tous les nombres parfaits peuvent s'écrire sous la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$ où $2^n - 1$ est un nombre de Mersenne 1^{er}
Nombres abondants	La somme de ses diviseurs propres est supérieure au nombre : $S > N$	$N = 12$	Tous les multiples de 6 (sauf 6) sont abondants Tous les nombres 1^{er} sont abondants Tous les multiples d'un nombre abondant sont abondants Tout nombre supérieur à 20 161 est la somme de deux nombres abondants...
Nombres amiables (ou amicaux)	Couples de nombres : La somme des diviseurs propres de l'un est égale à l'autre et réciproquement $S_1 = N_2$ et $S_2 = N_1$	$N_1 = 220$ et $N_2 = 284$	La paire 12 285 / 14 595 est la première impaire
Nombres intouchables	Nombre qui n'est jamais la somme des diviseurs propres d'un autre nombre	$N = 52$	Il existe une infinité de nombres intouchables 5 est le seul nombre intouchable trouvé pour l'instant (conjecture non démontrée)

Eh si ...

Nombres rigolos	La somme de ses chiffres est égale à la somme de tous les chiffres de ses facteurs premiers	$N = 666$	Les nombres 1^{er} sont exclus, car trop évidents....
------------------------	---	-----------	--

Conjectures non (encore) démontrées

Conjecture de Legendre :

Il existe toujours au moins un nombre premier entre n^2 et $(n + 1)^2$

La conjecture de Goldbach :

Tout nombre entier plus grand que 2 s'écrit comme somme d'au plus trois nombres 1^{ers}

Tout entier pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers. (version faible)

La conjecture de Polignac :

Tout entier naturel pair peut s'écrire comme différence de deux nombres premiers consécutifs et cela d'une infinité de manières.

Questions ouvertes

Existe-t-il une infinité de nombres 1^{er} de Mersenne ?

L'infinité des nombres 1^{er} a été prouvée

Différentes démonstrations... souvent un raisonnement par l'absurde :

On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres 1^{er}

(donc qu'il en existe un plus grand)

et on démontre qu'on peut en fabriquer un encore plus grand...

Cela démontre que l'hypothèse de départ (un nombre fini de nombre 1^{er}) est fausse,

et qu'il en existe bien une infinité !

Certaines de ces démonstrations vous seront accessibles à la fin du chapitre...

Existe-t-il une infinité de nombres premiers palindromes en base 10 ?

Les vingt premiers nombres 1^{er} palindromes en base 10 sont :

2, 3, 5, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919, 929

Que savez-vous des nombres entiers ?

1. Diviseurs d'un nombre

Définition : (d est un **diviseur** du nombre entier N) $\Leftrightarrow$ (N est un **multiple** de d)

$\Leftrightarrow$ (le résultat de la **division** $\frac{N}{d}$ est un **entier**)

On appellera $D(N)$ l'ensemble de tous les diviseurs d'un nombre N . **On a toujours** $1 \in D(N)$ et $N \in D(N)$

► Établir la liste de TOUS les diviseurs des nombres suivants :

a) $N = 5$

b) $N = 12$

c) $N = 19$

d) $N = 27$

e) $N = 36$

2. Nombres 1^{er} : le crible d'Ératosthène

Définition : Un nombre « **premier** » est un nombre qui n'admet que **2 diviseurs** : 1 et lui-même

$\Rightarrow D(N) = \{1; N\}$

Attention : 1 n'est pas un nombre premier...

► Déterminer les nombres qui sont premiers de 1 à 20

► Pour déterminer « facilement » les nombres premiers de 1 à 100, on peut utiliser le crible d'Ératosthène : il s'agit d'éliminer dans la liste des nombres ci-dessous, tous les multiples de 2, puis tous ceux de 3... Et ainsi de suite jusqu'aux multiples de $\sqrt{100} = 10$... J'ai commencé par éliminer tous les pairs, à vous pour la suite !

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

► Pour vérifier si un nombre entier N est premier * $\Rightarrow$ On essaye de le diviser par tous les nombres premiers entre 1 et $\sqrt{N}$

*S'il n'est ni pair, ni un multiple évident de 3 (la somme des chiffres est un multiple de 3) ou de 5 (se terminant par 5)...

Finalement, on ne se pose la question que pour des nombres se terminant par 1, 3, 7 ou 9...

Déterminer si les nombres suivants sont premiers :

a) $N = 151$

b) $N = 183$

c) $N = 257$

d) $N = 385$

e) $N = 473$

3. Nombres parfaits

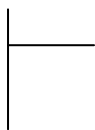
Définition : Un nombre entier est dit « **parfait** » s'il est égal à la somme de ses **diviseurs propres** (c'est-à-dire tous ses diviseurs, sauf lui-même)
⇒ si $D(N) = \{1; p_1; \dots p_k; N\}$, alors N est parfait si $N = 1 + p_1 + \dots + p_k$

- Il existe un nombre parfait entre 1 et 10... à vous de le trouver.
- Il existe un deuxième nombre parfait entre 20 et 30... à vous de le trouver.
- Il paraîtrait que 496 est un nombre parfait... vrai ?

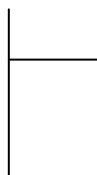
4. Division euclidienne

- Savez-vous encore poser une division **euclidienne** (on s'arrête à un quotient entier, et il y a un reste) ?

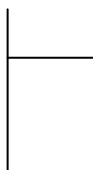
a) $93 \div 7$



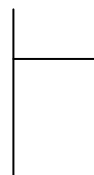
b) $1\,649 \div 8$



c) $451 \div 23$



d) $372 \div 12$



Notation en ligne :

$$93 = \dots \times 7 + \dots \quad \dots = \dots \times \dots + \dots \quad \dots = \dots \times \dots + \dots \quad \dots = \dots \times \dots + \dots$$

5. Quelques problèmes

Commencez par celui que vous voulez...

- A ►** Trouver tous les couples de nombres **entiers** naturels $(x; y)$ tels que le triangle ABC, avec $AB = 8$; $BC = x$ et $CA = y$, soit un triangle rectangle en A
- B ►** On choisit un nombre de 3 chiffres (genre 461), on forme un nombre de 6 chiffres en l'écrivant 2 fois (donc 461 461)... ce nombre est divisible par 91 ! (vérifiez...). Est-ce vrai avec n'importe quel nombre ?
Pour le démontrer il va peut-être falloir vous rappeler qu'un nombre qui s'écrit en base 10 $\overline{abcabc}$ s'écrit comme la décomposition : $a \times 10^5 + b \times 10^4 + \dots + b \times 10 + c$
- C ►** On dispose de 100 lampes numérotées de 1 à 100, dotées d'interrupteurs. Au début, elles sont toutes éteintes.
- A la 1^{ère} étape, on agit sur tous les interrupteurs allumant ainsi toutes les lampes.
 - A la 2^{ème} étape, on n'agit que sur les interrupteurs dont le numéro est un multiple de 2, éteignant ainsi une partie des lampes.
 - A la 3^{ème} étape, on n'agit que sur les interrupteurs dont le numéro est un multiple de 3, etc ...
1. Donner l'état de la lampe n°2 lors des 6 premières étapes, puis son état après la 100^{ème} étape. Recommencer pour les lampes n°3, 4, 5, 6 ...
 2. Déterminer l'état final des lampes n°68, n°81.
 3. Après la 100^{ème} étape, quelles seront les lampes allumées ? Expliquer.
- D ►** Trouver deux nombres **entiers** naturels x et y tels que $x^3 + y^3 = 5^3$

